UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01025979 4

4An
89k

LEHRBUCH
DER UNENDLICHEN REIHEN

VORLESUNGEN
GEHALTEN AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN

VON

Dr. NIELS NIELSEN
DOZENT DER REINEN MATHEMATIK

102713
23/6/10

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

QA
295
N54

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist aus einem Guß nicht entstanden.

Die eigentliche Reihenlehre wurde in der Tat schon im Frühlingssemester 1907 und zwar unter durchgängiger Anwendung der Analysis vorgetragen und lag in dieser Form schon am Schluß 1906 fertig vor.

Es zeigte sich aber, daß die Mehrzahl meiner Zuhörer von ihrem Studium der Analysis und der Funktionentheorie und den über diese Gegenstände gehaltenen Elementarvorlesungen nicht die Fundamentalbegriffe der Theorie der Zahlenfolgen und Zahlenmengen kannte.

Ich wurde daher von Studierenden aufgefordert von diesem Gesichtspunkte aus eine Elementarvorlesung über Funktionentheorie zu halten, und obgleich solche Elementarvorlesungen, meiner Anstellung nach, mir eigentlich nicht obliegen, bin ich doch der Aufforderung gefolgt.[1])

Durch sowohl mündliche als schriftliche Verhandlungen mit verschiedenen deutschen Kollegen, namentlich den Herrn Professoren G. Cantor in Halle und A. Pringsheim in München wurde ich angeregt, das schon im wesentlichen fertig redigierte Lehrbuch gänzlich umzuarbeiten und eine Reihenlehre ohne Anwendung der Fundamentaloperationen der Analysis (der Differentiation und Integration) darzustellen.

Der erste Teil des Buches ist demnach aus der Einleitung der obengenannten funktionentheoretischen Vorlesungen entstanden.

Da also die Theorie der Zahlenfolgen die einzige Grundlage der weiteren Entwicklungen des Buches sein mußte, so erschien es mir auch notwendig die Irrationalzahlen zu behandeln; dies ist in einer von den üblichen Darstellungen etwas abweichenden Form geschehen. Diese Darstellungsweise erschien mir aber natürlich, weil die zwei monotonen Zahlenfolgen, die ich als Definition einer Irrationalzahl anwende, überall da auftreten, wo es sich in der folgenden Darstellung

1) Diese Vorlesungen werden in dänischer Sprache ausgegeben und sind schon teilweise erschienen.

um den Existenzbeweis einer in anderer Weise definierten Zahl handelt.

Von der Theorie der Zahlenmengen habe ich nur die abzählbaren Mengen und das Kontinuum besprochen; diese Begriffe erscheinen mir in der Tat notwendig um den Begriff des Grenzwertes einer Funktion bzw. kontinuierlicher Variation der unabhängigen Variabeln zu verstehen.

In einem elementaren Lehrbuche wie das vorliegende darf man natürlich nicht durchweg Originalitäten des Verfassers suchen. Verschiedene Kapitel sind z. B., mit Genehmigung des Verfassers, beinahe wortgetreu nach den grundlegenden Arbeiten des Herrn Pringsheim dargestellt worden.

Als mir eigentümlich darf ich vielleicht z. B. die Darstellung der Multiplikation unendlicher Reihen, auch der trigonometrischen, und die Entwicklungen des letzten Kapitels hervorheben. Durch diese letzten Entwicklungen ist in der Tat, soviel ich verstehe, die erste Grundlage einer wirklich elementaren Theorie der Dirichletschen Reihen, der Fakultäten- und der Binomialkoeffizientenreihen gegeben worden, indem die Bestimmung des Konvergenzbereiches dieser Reihen unmittelbar lehrt, daß die betreffenden Reihen in diesem Bereiche stets gleichmäßig konvergieren. Ich erlaube mir noch auf die letzten Aufgaben im Anhange aufmerksam zu machen; die dort ausgesprochenen Lehrsätze sind in der Tat ohne Schwierigkeit zu beweisen, obgleich eine detailliertere Darstellung dieser Beweise im Texte mir nicht angemessen erschien.

Bei einem Lehrbuche wie das vorliegende muß es ja wohl als eine persönliche Willkürlichkeit des Verfassers angesehen werden, warum er eben diese und nicht ebenso gut auch jene Einzelheit mit genommen hat. Ich hoffe aber indessen, daß man in bezug auf die fundamentalen Fragen meine Darstellung als recht vollständig finden dürfte.

In betreff der recht zahlreichen Übungsaufgaben darf ich natürlich nicht behaupten, daß alle diejenigen, die entweder mit Quellenzitaten nicht versehen sind oder bekannte Formeln nicht behandeln, von mir herrühren, obgleich gewiß viele Originalaufgaben sind.

Bei den Quellenzitaten habe ich mich dafür bestrebt, soweit es mir nur möglich war, die ersten und wichtigsten Schriften, die den betreffenden Gegenstand behandeln, zu nennen. Ist dies mir nicht immer gelungen, oder habe ich hier und da sogar ungenau oder falsch zitiert, so hoffe ich auf Verzeihung desjenigen Lesers, der mit den Schwierigkeiten eines solchen Unternehmens vertraut ist.

Dem elementaren Charakter des Buches zufolge schien es mir nicht angemessen ein Literaturverzeichnis, wie in meinen rein wissenschaftlichen Handbüchern, zu geben.

Es sei mir hier noch gestattet, verschiedenen Mathematikern meinen herzlichsten Dank für ihre Teilnahme bei der Ausarbeitung des Buches auszusprechen:

Herrn Professor Pringsheim nicht nur wegen seiner grundlegenden Arbeiten, die mir von meiner ersten Jugend an so wertvoll gewesen sind, aber auch für die Liebenswürdigkeit, mit welcher dieser ausgezeichnete Forscher sowohl schriftlich als mündlich über die Anordnung des Stoffes mit mir verhandeln wollte;

Herrn General Madsen, Direktor der dänischen Gradmessung, für die liebenswürdige Geduld, mit welcher er mit mir verschiedene Abschnitte durchgearbeitet hat, und für die redaktionellen Verbesserungen, die er mir vorgeschlagen hat;

Herrn H. Bohr und Herrn A. Mikkelsen-Vendsyssel für die gegenseitigen Anregungen während der Vorlesungen; von Herrn Bohr rühren ja z. B. die Paragraphen 47 und 77 her.

Endlich muß ich vor allem der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung meinen besten Dank für das, wie immer, liebenswürdige Eingehen auf alle meine Wünsche bei der Drucklegung des Buches aussprechen.

Kopenhagen, den 23. August 1908.

Dr. **Niels Nielsen.**

Inhalt.

Erster Teil.

Theorie der Zahlenfolgen.

Kapitel I. **Rationale Zahlen.** Seite

§ 1. Absoluter Betrag einer Potenz. Aufgabe 1 3
§ 2. Rationale Zahlenfolgen. Aufgaben 2—4 5
§ 3. Unendliche Dezimalbrüche. Aufgaben 5—6 8

Kapitel II. **Theorie der Irrationalzahlen.**

§ 4. Annäherungsreihen und Grenzzahlen. Aufgabe 7 10
§ 5. Gleichheit und Ungleichheit zweier Grenzzahlen 13
§ 6. Rechnen mit Grenzzahlen. Aufgaben 8—10 15
§ 7. Sätze über Grenzzahlen. Aufgaben 11—13 18
§ 8. Allgemeine Bemerkungen 22

Kapitel III. **Theorie der reellen Zahlenfolgen.**

§ 9. Das Verhalten einer Zahlenfolge. Aufgaben 14—15 23
§ 10. Das allgemeine Konvergenzprinzip für Zahlenfolgen. Aufgabe 16 . 26
§ 11. Monotone Zahlenfolgen. Aufgaben 17—19 28
§ 12. Häufungsstellen einer Zahlenfolge. Aufgaben 20—22 30
§ 13. Obere und untere Grenze. Aufgaben 23—24 32
§ 14. Limes superior und limes inferior. Aufgaben 25—26 35
§ 15. Hilfssatz von Abel. Aufgaben 27—28 37

Kapitel IV. **Komplexe Zahlenfolgen.**

§ 16. Rechnenoperationen mit Zahlenpaaren. Aufgaben 29—32 38
§ 17. Absoluter Betrag und Charakteristik komplexer Zahlen. Aufgaben 33—35 43
§ 18. Zahlenfolgen mit komplexen Elementen. Aufgaben 36—37 45
§ 19. Sätze von Cauchy und Jensen. Aufgaben 38—39 47

Kapitel V. **Anwendungen auf die Elementartranszendenten.**

§ 20. Die Exponentialfunktion e^x. Aufgaben 40—45 50
§ 21. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ 55
§ 22. Die Multiplikation komplexer Zahlen. Die geometrische Reihe. Aufgaben 46—48 59
§ 23. Der natürliche Logarithmus. Aufgabe 49 62
§ 24. Potenz mit willkürlichem Exponent. Aufgaben 50—56 67
§ 25. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. Aufgaben 57—59 71

Kapitel VI. **Über zweifach unendliche Zahlenfolgen.**

§ 26. Konvergenz, Divergenz und Oszillation 73
§ 27. Sätze über konvergente Doppelfolgen. Aufgabe 60 75
§ 28. Monotone Doppelfolgen 78
§ 29. Analogon der Sätze von Cauchy und Jensen 80

Zweiter Teil.

Reihen mit konstanten Gliedern.

Kapitel VII. **Das Verhalten unendlicher Reihen.** Seite

§ 30. Konvergenz, Divergenz und Oszillation. Aufgaben 61—67 85
§ 31. Bedingte und unbedingte Konvergenz. Aufgaben 68—76 89
§ 32. Sätze über absolut konvergente Reihen 95
§ 33. Addition und Multiplikation unendlicher Reihen. Aufgabe 77 . . 97
§ 34. Sogenannte Summierbarkeit von Reihen. Aufgaben 78—82 . . . 98

Kapitel VIII. **Konvergenz und Divergenz gewisser Reihen.**

§ 35. Satz von Leibniz über alternierende Reihen. Aufgaben 83—86 . . 100
§ 36. Methode der Reihenvergleichung. Aufgaben 87—90 102
§ 37. Methode von Bernoulli, Nicole, Abel und Pringsheim. Aufgaben 91—97 104
§ 38. Sätze von Abel, Dini und Jensen. Aufgaben 98—99 108
§ 39. Sätze von du Bois Reymond und Dedekind. Aufgaben 100—106 111

Kapitel IX. **Elementare Konvergenzkriterien.**

§ 40. Sätze von Cauchy, Raabe und Kummer. Aufgaben 107—109 . . . 113
§ 41. Das logarithmische Kriterium. Aufgaben 110—113 116
§ 42. Reihen mit komplexen Gliedern. Satz von Weierstraß 120

Kapitel X. **Multiplikation unendlicher Reihen.**

§ 43. Sätze von Cauchy, Abel, Mertens und Cesàro. Aufgaben 114—116 122
§ 44. Anderer Beweis des Satzes von Mertens 125
§ 45. Sätze von Pringsheim. Aufgabe 117 126
§ 46. Satz von Pringsheim über alternierende Reihen. Aufgaben 118—120 129
§ 47. Allgemeine Bemerkungen über Reihenmultiplikation 133

Kapitel XI. **Transformation von Reihen.**

§ 48. Methode von Euler und Markoff. Aufgaben 121—122 136
§ 49. Methode von Kummer. Aufgaben 123—124. 140
§ 50. Änderungen der Methode von Kummer. Aufgaben 125—126 . . . 143

Kapitel XII. **Über Reihen mit positiven Gliedern.**

§ 51. Ergänzung eines Satzes von Abel 145
§ 52. Über die logarithmischen Kriterien 149
§ 53. Typische Formen der divergenten Reihen. Aufgabe 127 152
§ 54. Typische Formen der konvergenten Reihen. Aufgaben 128—130 . 154

Kapitel XIII. **Allgemeine Kriterien von Pringsheim.**

§ 55. Die Kriterien erster Art 159
§ 56. Die Kriterien zweiter Art 163
§ 57. Vergleichung der Kriterien erster und zweiter Art. Aufgabe 131 . 169
§ 58. Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern 173

Kapitel XIV. **Unendliche Produkte.**

§ 59. Konvergenz und Divergenz. Aufgaben 132—133 178
§ 60. Absolut oder unbedingt konvergente Produkte. Aufgaben 134—137 181
§ 61. Über bedingt konvergente Produkte. Aufgaben 138—139 184

Kapitel XV. **Unendliche Kettenbrüche.**

§ 62. Definitionen. Entwicklung in eine Reihe. Aufgaben 140—141 . . 186
§ 63. Verwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch. Aufgaben 142—143 189
§ 64. Kettenbrüche von Lambert und Legendre. Aufgabe 144 190

Kapitel XVI. **Doppelreihen nach Pringsheim.** Seite

§ 65. Konvergenz, Divergenz und Oszillation 193
§ 66. Über Zeilen- und Kolonnenreihen. Aufgabe 145 196
§ 67. Über die Diagonalsummenreihen 198
§ 68. Beispiele 201
§ 69. Absolut konvergente Doppelreihen 203
§ 70. Unbedingt konvergente Doppelreihen 205

Dritter Teil.

Reihen mit veränderlichen Gliedern.

Kapitel XVII. **Zahlenmengen.**

§ 71. Äquivalenz und Häufungsstellen 211
§ 72. Abzählbare Mengen 214
§ 73. Das Liniekontinuum 215
§ 74. Das Arealkontinuum. Aufgaben 146—149 217

Kapitel XVIII. **Funktionen.**

§ 75. Der Funktionsbegriff. Aufgaben 150—152 220
§ 76. Endliche reelle Funktionen. Satz von Weierstraß. Aufgaben 153—155 223
§ 77. Allgemeines Konvergenzprinzip für das Kontinuum 225
§ 78. Anwendungen auf komplexe Variabeln. Aufgabe 156 229
§ 79. Stetige Funktionen. Satz von G. Cantor. Aufgaben 157—158 . . 232
§ 80. Sätze über stetige Funktionen. Aufgaben 159—162. 236

Kapitel XIX. **Gleichmäßige Konvergenz.**

§ 81. Gleichmäßig konvergente Fundamentalreihen. Aufgaben 163—165 238
§ 82. Gleichmäßig konvergente Reihen. Aufgaben 166—171 241
§ 83. Gleichmäßig konvergente Produkte. Aufgaben 172—173 245
§ 84. Grenzwert von Gauß. Die Gammafunktion. Aufgaben 174—175 . 248

Kapitel XX. **Trigonometrische Reihen.**

§ 85. Konvergenzkriterien. Satz von Malmstén. Aufgabe 176 251
§ 86. Rechnen mit trigonometrischen Reihen. Aufgabe 177 253
§ 87. Satz von Pringsheim. Aufgaben 178—179 256

Kapitel XXI. **Potenzreihen.**

§ 88. Der Konvergenzkreis 260
§ 89. Satz von Abel 263
§ 90. Satz von Frobenius. Aufgabe 180 266
§ 91. Rechnen mit Potenzreihen. Aufgaben 181—182 268
§ 92. Über die Bestimmung des Konvergenzradius. Aufgaben 183—184 269

Kapitel XXII. **Dirichletsche Reihen und Fakultätenreihen.**

§ 93. Folgerungen aus den Sätzen von Abel, du Bois Reymond und Dedekind. Aufgabe 185 272
§ 94. Anwendungen auf gewisse speziellere Funktionentypen. Aufgaben 186—188. 275
§ 95. Dirichletsche Reihen. Satz von Jensen. Aufgabe 189 278
§ 96. Fakultätenreihen. Aufgaben 190—192 281

Anhang. **Weitere Übungsaufgaben.** Aufgabe 193—210. 284
„ **Zusätze und Berichtigungen** 286

ERSTER TEIL.

THEORIE DER ZAHLENFOLGEN.

Kapitel I.

Rationale Zahlen.

§ 1. Absoluter Betrag einer Potenz.

Die Menge der *rationalen Zahlen* ist der Inbegriff sämtlicher Zahlen, die als endliche ganze Zahlen oder als irreduzible Brüche, deren Zähler und Nenner endliche ganze Zahlen sind, indem jedoch der Nenner „Null“ ausgeschlossen bleibt, dargestellt werden können.

In der elementaren Arithmetik wird gezeigt, wie man eine endliche Zahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen mit einer endlichen Sammlung rationaler Zahlen ausführt. Aus diesen Rechnenoperationen leitet man dann die Sätze über Potenzen mit ganzen Exponenten ab.

Unter Division wird der Begriff „unendlich groß“ eingeführt, nämlich durch Division durch „Null“.

Unter Zuhilfenahme dieser elementaren Rechnenoperationen, die ja sämtlich, außer der Division durch Null, wieder zu rationalen Zahlen führen, entwickelt man auch die Binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n,$$

wo a und b rational, n positiv ganz vorausgesetzt werden.

Wir haben nun zu zeigen, wie man aus diesen elementaren Rechnenoperationen eine allgemeine Theorie der reellen Zahlenfolgen entwickeln kann. Zu diesem Zwecke beginnen wir ganz natürlich damit, einige Fundamentalbegriffe zu besprechen.

Der *absolute Betrag* $|a|$ von a wird, je nachdem a positiv oder negativ ist, durch die Gleichung

$$|a| = \pm a \tag{1}$$

definiert; $|a|$ ist daher stets positiv, wenn a von 0 verschieden angenommen wird, also, indem wir das Ungleichheitszeichen $\neq$ benutzen, wenn $a \neq 0$ ist.

Aus der Definition (1) findet man unmittelbar

$$|a+b| = |a| + |b|; \quad |a+b| = |a| - |b|, \tag{2}$$

je nachdem a und b dasselbe Zeichen haben oder nicht; allgemein hat man daher

$$(3) \qquad \big||a| - |b|\big| < |a+b| \leq |a| + |b| .$$

Weiter findet man

$$(4) \qquad |ab| = |a| \cdot |b| , \; |a^n| = |a|^n,$$

wo in der letzten Formel (4) n eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Betrachtet man verschiedene Potenzen mit ganzzahligen Exponenten derselben rationalen Zahl a, so bestimmt man unmittelbar das Zeichen jeder einzelnen dieser Potenzen; wegen (4) hat man demnach nur denjenigen Fall zu untersuchen, in welchem a positiv vorausgesetzt wird. Man hat dann bekanntlich für ganze nicht negative n

$$(5) \qquad a^{n+1} \gtrless a^n,$$

je nachdem $a \gtrless 1$ vorausgesetzt wird.

Unter Zuhilfenahme der Binomialformel findet man aber weitere Auskünfte über die Ungleichung (5) mit wachsendem Werte von n; entwickelt man in der Tat für $a > 1$ die Potenz rechter Hand in der Identität

$$a^n = (1 + (a-1))^n$$

nach der Binomialformel, und nimmt man nur die zwei ersten der $(n+1)$ *positiven* Glieder dieses Ausdruckes mit, so erhält man

$$(6) \qquad a^n > 1 + n\,(a-1).$$

Bezeichnet nun E eine vorgegebene willkürlich große positive Zahl, so hat man wegen (6) sicher

$$(7) \qquad a^n > E,$$

wenn nur $n\,(a-1) > E$ ist, d. h. wenn

$$(8) \qquad n > \frac{E-1}{a-1}, \; a > 1$$

angenommen wird.

Setzt man in (7) und (8) $1 : a$ anstatt a und $\varepsilon = 1 : E$, so findet man für $a < 1$

$$(9) \qquad a^n < \varepsilon, \; n > \frac{(1-\varepsilon)\,b}{(1-b)\,\varepsilon},$$

wo ε also eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe bezeichnet.

---

1. Bedeuten x und n positive ganze Zahlen, so hat man sicher

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 10^{-n},$$

wenn $x > \frac{10\,n}{3}$ angenommen wird.

§ 2. Rationale Zahlenfolgen.

Die unendliche Sammlung rationaler Zahlen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{1}$$

bilden eine *rationale Zahlenfolge,* wenn wir ein, jedenfalls theoretisches, Mittel besitzen um jede einzelne dieser Zahlen, z. B. a_n zu bestimmen[1]), wenn ihr Stellenzeiger n aufgegeben wird.

Beispiel 1. Die Zahlen

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots \tag{2}$$

bilden eine Zahlenfolge, in der man unmittelbar jede einzelne Zahl angeben kann, wenn nur der entsprechende Stellenzeiger aufgegeben wird.

So einfach ist die Sache aber im allgemeinen nicht; man muß sich vielmehr denken, daß man die Zahlen einer Zahlenfolge nur sukzessive bestimmen kann, nachdem man sämtliche vorhergehende Zahlen gefunden hat.

Beispiel 2. Die *irreduziblen Brüche,* die durch die Ausdrücke

$$\frac{1^2}{p^2},\ \frac{2^2}{p^2},\ \frac{3^2}{p^2},\ \cdots,\ \frac{(2p+1)^2}{p^2} \tag{3}$$

für positive ganze p gebildet werden können, bilden auch eine Zahlenfolge; hier sind wir aber nicht imstande die Zahl a_n *direkt* zu bestimmen, wenn der Stellenzeiger n angegeben wird; dies ist in der Tat nur dann möglich, wenn alle vorhergehenden Zahlen unserer Folge gefunden worden sind.

Beispiel 3. Die Sammlung aller möglichen rationalen Zahlen bildet eine Zahlenfolge; dies findet man, wenn man z. B. diese Zahlen so in Gruppen teilt, daß jede einzelne Gruppe diejenigen Zahlen $\pm p : q$ enthält, für welche die Summe $p + q$ denselben Wert hat. Die Zahlen einer solchen Gruppe lauten z. B.

$$\frac{1}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{2},\ -\frac{5}{2},\ \frac{6}{1},\ -\frac{6}{1};\ p+q=7$$

$$\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7},\ \frac{3}{5},\ -\frac{5}{3},\ \frac{7}{1},\ -\frac{7}{1};\ p+q=8.$$

Die allgemeine Zahlenfolge (1) muß immer einer der folgenden Bedingungen Genüge leisten:

1. Existiert eine solche ganz bestimmte rationale Zahl ω, daß es möglich ist für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe ε

1) Diese Definition involviert also, daß die a_n für jedes angebbare n sämtlich endlich und bestimmt sein müssen.

eine positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$|a_n - \omega| < \varepsilon \tag{4}$$

ist; dann heißt diese rationale Zahl ω der *Grenzwert* der Zahlenfolge (1), und man setzt

$$\lim_{n=\infty} a_n = \omega; \tag{5}$$

diese Gleichung sagt also dasselbe aus wie die Ungleichung (4).

In diesem Falle nennt man die Zahlenfolge (1) *konvergent* mit dem Grenzwerte ω.

Beispiel 4. Die Zahlenfolge (2) ist konvergent und hat den Grenzwert 1.

Beispiel 5. Setzt man $-1 < a < 1$ voraus, so ist die Zahlenfolge

$$a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots$$

wegen § 1, (9) konvergent mit dem Grenzwerte 0; man hat also

$$\lim_{n=\infty} (a^n) = 0, \quad |a| < 1. \tag{6}$$

Beispiel 6. Ist $|q| < 1$, und setzt man für positive ganze n

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, \tag{7}$$

so ist die Zahlenfolge

$$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots \tag{8}$$

konvergent mit dem Grenzwerte $a : (1-q)$, also

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{1-q}; \tag{9}$$

denn man hat in der Tat

$$\left| s_n - \frac{a}{1-q} \right| \leqq \frac{a}{1-q} \cdot |q|^n,$$

und (9) ist somit eine unmittelbare Folge der Ungleichung § 1, (9).

2. Wie groß die positive Zahl E auch angenommen wird, so ist es doch möglich, eine solche positive ganze Zahl N anzugeben, daß für $n \geqq N$ immer

$$|a_n| > E \tag{10}$$

ist; in diesem Falle heißt die Zahlenfolge (1) *divergent*. Haben die Zahlen a_n von einem gewissen n an sämtlich dasselbe Vorzeichen, so heißt die Folge *eigentlich*, sonst uneigentlich *divergent*.

Im Falle der eigentlichen Divergenz setzt man auch hier

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty \text{ bzw. } \lim_{n=\infty} a_n = -\infty. \tag{11}$$

Beispiel 7. Ist $|a|>1$, also entweder $a>1$ oder $a<-1$, so ist die Zahlenfolge

$$a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots$$

divergent, und zwar eigentlich divergent für positive a, uneigentlich für negative.

Beispiel 8. Die Zahlenfolge (8) ist für $|q|>1$ oder $q=1$ divergent; für $q=1$ hat man nämlich offenbar $s_n = a \cdot n$.

3. Die Zahl a_n wird für unbegrenzt wachsende n ganz und gar unbestimmt; die Zahlenfolge (1) heißt in diesem Falle *oszillierend*.

Wenn es dann möglich ist, zwei solche endliche Zahlen A und B anzugeben, daß für jedes n immer $A \geqq a_n \geqq B$ ist, so sagt man, daß die Zahlenfolge (1) zwischen endlichen Grenzen oszilliert. Wenn nicht die beiden endlichen Zahlen A und B existieren, so oszilliert unsere Folge zwischen den Grenzen $\pm\infty$.

Beispiel 9. Setzt man $a_n = (-1)^n$, so ist immer $a_{2n} = +1$, $a_{2+n} = -1$; diese Folge oszilliert daher zwischen endlichen Grenzen.

Beispiel 10. Die Zahlenfolge (8) oszilliert für $q=-1$ zwischen endlichen Grenzen; denn man hat $s_{2n}=0$, $s_{2n+1}=1$.

Beispiel 11. Die Zahlenfolge (2) oszilliert zwischen den Grenzen 0 und 4.

Beispiel 12. Die aus sämtlichen rationalen Zahlen gebildete Folge oszilliert zwischen den Grenzen $\pm\infty$.

4. Wenn keiner der drei vorhergehenden Fälle eintritt, und daß dies wirklich möglich ist, zeigen wir im nächsten Paragraphen, so gibt der Begriff der rationalen Zahlen kein Mittel, um unsere Zahlenfolge weiter zu behandeln.

---

2. Setzt man

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n},\quad s'_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots 2^{n-1},$$

so hat man sicher für $n \geqq 100$ sowohl $2 - s_n < \frac{1}{10^{30}}$ als $s'_n > 10^{30}$.

3. Unter Zuhilfenahme der Binomialformel soll man die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty,\quad |a|>1;\quad \lim_{n=\infty} (b^n \cdot n^p) = 0,\quad |b|<1$$

herleiten, indem p eine willkürliche endliche positive ganze Zahl bedeutet.

4. Wenn eine geometrische und eine arithmetische Reihe beide dieselben zwei ersten Glieder a_1 und a_2 haben, indem $a_2 > a_1 > 0$

ist, so ist jedes folgende Glied der geometrischen Reihe größer als das entsprechende Glied der arithmetischen. (Jacob Bernoulli.)[1])

§ 3. Unendliche Dezimalbrüche.

1. *Rein periodische Dezimalbrüche.* Jeder rein periodische Dezimalbruch, der die Einheit nicht übersteigt, kann immer folgendermaßen geschrieben werden

$$\omega = \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \cdots, \tag{1}$$

wo a eine positive ganze Zahl kleiner als 10^n bezeichnet; dieser Dezimalbruch ist demnach eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede $a \cdot 10^{-n}$ und dem Quotienten 10^{-n}; man hat daher wegen § 2, (9)

$$\omega = \frac{a}{10^n - 1}. \tag{2}$$

Ist nun $A_q : 10^q$ derjenige endliche Dezimalbruch, der mit den q ersten Ziffern in (1) geschrieben wird, und setzt man $n(p+1) \leq q < n(p+2)$ voraus, so hat man

$$\omega - \frac{A_q}{10^q} \leq \frac{a}{10^{n(p+1)}} + \frac{a}{10^{n(p+2)}} + \cdots \leq \frac{a}{10^{np}(10^n - 1)}.$$

Es ist demnach möglich, so viele Dezimalstellen aus dem Bruche (1) mit zu nehmen, daß der dadurch gebildete endliche Dezimalbruch der rationalen Zahl ω beliebig nahe kommt.

Ist nicht gleichzeitig $a = 9$ und $n = 1$, so ist die rationale Zahl ω immer ein echter Bruch; für $a = 9$, $n = 1$ hat man aber

$$1 = 0{,}9999\ldots. \tag{3}$$

2. *Gemischt periodische Dezimalbrüche.* Hat a dieselbe Bedeutung wie in (1), und ist b eine solche ganze Zahl, daß $0 \leq b < 10^p$ ist, so kann jeder gemischt periodische Dezimalbruch, der die Einheit nicht übersteigt, immer folgendermaßen geschrieben werden

$$\omega_1 = \frac{b}{10^p} + \frac{a}{10^{n+p}} + \frac{a}{10^{2n+p}} + \frac{a}{10^{3n+p}} + \cdots, \tag{4}$$

und man findet also

$$\omega_1 = \frac{10^n b + a - b}{10^p (10^n - 1)}; \tag{5}$$

in dem Spezialfalle $a = 9$, $n = 1$ ergibt sich daher der endliche Dezimalbruch

$$\omega_1 = \frac{b+1}{10^p}. \tag{6}$$

1) Opera Bd. I, p. 380; Genf 1744.

In der elementaren Arithmetik wird bewiesen, daß jede positive rationale Zahl in einen Dezimalbruch, der entweder endlich oder periodisch sein muß, verwandelt werden kann. Unter Zuhilfenahme der beiden Formeln (3) und (6) kann jeder endliche Dezimalbruch, darunter eine ganze Zahl mitgerechnet, als ein unendlicher periodischer Dezimalbruch mit der Periode 9 dargestellt werden. Da außerdem zwei Dezimalbrüche dann und nur dann denselben Wert haben können, wenn ihre Ziffern mit demselben Stellenzeiger gleich sind, so hat man den Satz, der schon im Prinzipe von Wallis[1]) angegeben worden ist:

I. *Jeder periodische Dezimalbruch stellt eine ganz bestimmte rationale Zahl dar; umgekehrt kann jede positive rationale Zahl in eindeutiger Weise in einen unendlichen periodischen Dezimalbruch, dessen Periode nicht gleich Null ist, verwandelt werden.*

3. *Nicht-periodische Dezimalbrüche.* Wir betrachten nunmehr den Dezimalbruch

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots, \tag{7}$$

über welchen wir voraussetzen, daß er nicht-periodisch ist; setzen wir

$$\frac{A_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{8}$$

dann ist sicher für jeden positiven ganzen Wert von p

$$\frac{A_n}{10^n} \leqq \frac{A_{n+p}}{10^{n+p}} < \frac{A_n + 1}{10^n}.$$

Bedeutet demnach ε eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe, so ist es möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$\frac{A_{n+p}}{10^{n+p}} - \frac{A_n}{10^n} < \varepsilon \tag{9}$$

wird, indem p eine willkürliche positive ganze Zahl bedeutet.

Andererseits ist es aber nicht möglich eine solche rationale Zahl ω_2 zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$\left|\omega_2 - \frac{A_n}{10^n}\right| < \varepsilon$$

wird; denn bei demjenigen für ω_2 erhaltenen periodischen Dezimalbruch und dem nicht-periodischen Dezimalbruch (7) ist mindestens eine Ziffer mit einem angebbaren Stellenzeiger verschieden, und der absolute

1) De algebra tractatus, Kap. 80; 1693.

Betrag der Differenz dieser beiden Dezimalbrüche kann daher nicht unter jede Grenze hinabsinken.

Der Dezimalbruch (7) ist demnach, der beiden Ungleichungen (9) und (10) wegen, ein Beispiel zum Falle 4 des vorhergehenden Paragraphen.

Wir haben aber nun zu zeigen, wie es möglich ist den Zahlenbegriff in solcher Weise zu verallgemeinern, daß wir auch Zahlenfolgen dieser Natur beherrschen können.

---

5. Aus einem periodischen Dezimalbruch mit n Ziffern in der Periode werden diejenigen Ziffern, deren Stellenzeiger eine Differenzenreihe mit der Differenz p bilden, ausgenommen. Man soll beweisen, daß der aus diesen Ziffern in derselben Ordnung gebildete Dezimalbruch wieder ein periodischer wird und die Ziffernzahl seiner Periode bestimmen.
6. Es ist zu beweisen, daß die Summe und Differenz zweier periodischer Dezimalbrüche mit bzw. n und p Ziffern in der Periode wieder als periodischer Dezimalbruch dargestellt werden kann, und daß seine Periode höchstens M Ziffern enthalten kann, wenn M kleinstes gemeinsames Vielfaches für n und p bezeichnet.

Kapitel II.

Theorie der Irrationalzahlen.

§ 4. Annäherungsreihen und Grenzzahlen.

Um den Zahlenbegriff zu erweitern betrachten wir nunmehr zwei unendliche Folgen rationaler Zahlen

$$(1) \qquad \begin{cases} h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots & (H) \\ l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots & (L), \end{cases}$$

die nach einem vorgegebenen Gesetze zu bilden sind, und die den folgenden Bedingungen Genüge leisten sollen:

1. *Für jedes n hat man*

$$(2) \qquad h_n \geq h_{n+1}, \quad l_n < l_{n+1}, \quad h_n > l_n.$$

2. *Bezeichnet ε eine willkürlich kleine, vorgegebene positive Größe, so ist es möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n > N$ immer*

$$(3) \qquad h_n - l_n < \varepsilon$$

wird.

Beispiel 1. Aus einem unendlichen Dezimalbruch kann man eine Zahlenfolge (L) aus denjenigen endlichen Dezimalbrüchen, die mit $0, 1, 2, 3, \ldots$ Ziffern des vorgelegten geschrieben werden, bilden, während man eine entsprechende Folge (H) durch Erhöhung mit einer Einheit der letzten Ziffer der entsprechenden Zahl l erhalten kann. Hier hat man daher stets

$$h_n - l_n = \frac{1}{10^n}.$$

Beispiel 2. Bezeichnen die a_n für $n \geqq 1$ positive ganze Zahlen, während a_0 ganz und nicht negativ ist, so bilden die Annäherungsbrüche $y_{2r+1} : z_{2r+1}$ mit ungeraden Stellenzeiger des Kettenbruchs

$$(4) \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

eine Zahlenfolge (H), die entsprechenden $y_{2r} : z_{2r}$ eine dazu gehörige Folge (L); hier ist daher immer

$$h_n - l_n = \frac{1}{z_{2n} \cdot z_{2n+1}}.$$

Über die allgemeinen Zahlenfolgen (1) gelten die folgenden Sätze:

I. *Bezeichnen n und p ganz willkürliche Stellenzeiger, so hat man immer*

$$(5) \qquad h_n > l_p.$$

Ist nämlich $n < p$, so hat man $h_n > h_p > l_p$; für $n > p$ ist aber $h_n > l_n \geqq l_p$.

II. *Wird n so bestimmt, daß die Bedingung* (3) *erfüllt ist, so hat man für jedes positive ganze p*

$$(6) \qquad \begin{cases} h_n - h_{n+p} < \varepsilon & l_{n+p} - l_n < \varepsilon \\ h_n - l_{n+p} < \varepsilon, & h_{n+p} - l_n < \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist nämlich

$$h_n - h_{n+p} < h_n - l_{n+p} \leqq h_n - l_n < \varepsilon$$

und

$$l_{n+p} - l_n < h_{n+p} - l_n < h_n - l_n < \varepsilon,$$

womit die vier Ungleichungen (6) sämtlich bewiesen sind.

III. *Es existieren nicht zwei verschiedene rationale Zahlen a und a_1, so daß für jedes n die beiden Bedingungen*

$$(7) \qquad h_n \geqq a \geqq l_n, \qquad h_n \geqq a_1 \geqq l_n$$

befriedigt sind.

Wäre dies nämlich der Fall, so hätte man für jedes n

$$h_n - l_n \geq a - a_1 ,$$

was wegen (3) unmöglich ist.

Existiert aber nun wirklich eine solche *rationale* Zahl a, daß für jedes n

$$h_n \geq a \geq l_n \tag{8}$$

ist, so ist a der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen (1); denn wegen (3) und (8) erhält man für $n \geq N$ immer

$$h_n - a < \varepsilon, \quad l_n - a < \varepsilon;$$

es ist demnach

$$a = \lim_{n=\infty} h_n = \lim_{n=\infty} l_n. \tag{9}$$

Beispiel 3. Diejenigen nach der im Beispiel 1 gegebenen Regel gebildeten Zahlenfolgen definieren immer eine rationale Grenzzahl, wenn der Dezimalbruch ein periodischer ist. Umgekehrt kann jede positive rationale Zahl wegen § 3, I durch dies Verfahren als Grenzzahl dargestellt werden.

Existiert aber keine solche *rationale* Zahl a, daß für jedes n die Bedingungen (8) erfüllt sind, so sagt man, daß die Zahlenfolgen (1) eine *irrationale* Grenzzahl ω definieren, und wir setzen auch hier

$$h_n > \omega > l_n, \qquad \omega = \lim_{n=\infty} h_n = \lim_{n=\infty} l_n. \tag{10}$$

Beispiel 4. Unendliche nicht-periodische Dezimalbrüche und unendliche Kettenbrüche von der Form (4) definieren immer irrationale Grenzzahlen.

In den beiden obengenannten einzig möglichen Fällen sind die Zahlen h_n und l_n demnach obere und untere Annäherungswerte derjenigen durch die Zahlenfolgen (1) definierten Grenzzahlen, und diese Annäherungswerte geben mit wachsendem Stellenzeiger die Grenzzahl mit größerer und größerer Genauigkeit an.

Die Zahlenfolgen (1) werden daher *Annäherungsreihen* für ihre Grenzzahl genannt.

Beispiel 5. Die gewöhnliche elementare Methode zum Quadratwurzelausziehen mit einer vorgegebenen Zahl von Dezimalstellen gibt eine untere Annäherungsreihe für die positive Wurzel der Gleichung $x^2 = a$, wo a positiv, rational aber nicht quadratisch ist. Nach der im Beispiel 1 angegebenen Regel bilden wir dann auch die obere Annäherungsreihe, und aus unserer obenstehenden Definition der irrationalen Grenzzahl folgt dann, daß die Gleichung $x^2 = a$ eine und nur

eine positive Wurzel hat, wenn a positiv und rational vorausgesetzt wird.

Nach diesen Erläuterungen bemerken wir hier noch, daß die Formeln (1) und (6) unmittelbar den folgenden Satz liefern:

IV. *Bezeichnen* $p_0, p_1, p_2 \dots p_n \dots, q_0, q_1, q_2 \dots q_n \dots$ *zwei willkürliche Folgen immer wachsender positiver ganzer Zahlen, und werden aus* (1) *die beiden Zahlenfolgen*

$$(11) \qquad \begin{cases} h_{p_0}, h_{p_1}, h_{p_2}, \dots, h_{p_n}, \dots \\ l_{q_0}, l_{q_1}, l_{q_2}, \dots, l_{q_n}, \dots \end{cases}$$

auserwählt, so sind diese Folgen auch Annäherungsreihen und ihre Grenzzahl ist dieselbe wie die durch die Reihen (1) *definierte.*

7. Setzt man für n positiv ganz

$$h_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$l_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2),$$

so soll man beweisen, daß die dadurch definierten Zahlenfolgen Annäherungsreihen sind und die entsprechende Grenzzahl bestimmen.

§ 5. Gleichheit und Ungleichheit zweier Grenzzahlen.

Wir betrachten nunmehr zwei Grenzzahlen ω und ω', die durch die Annäherungsreihen

$$(1) \qquad \begin{cases} h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots & (H) \\ l_0, l_1, l_2, \dots, l_n, \dots & (L) \end{cases}$$

und

$$(2) \qquad \begin{cases} h'_0, h'_1, h'_2, \dots, h'_n, \dots & (H') \\ l'_0, l'_1, l'_2, \dots, l'_n, \dots & (L') \end{cases}$$

definiert werden; es muß dann immer einer der folgenden drei Fälle eintreffen:

1. Es ist, für ein gewisses n, $l_n > h'_n$; dann ist auch, für jedes positive ganze p, $h_{n+p} > h'_{n+p}$; ω heißt in diesem Falle *größer* als ω', und man setzt wie bei rationalen Zahlen $\omega > \omega'$.

2. In ähnlicher Weise nennt man ω *kleiner* als ω', wenn von einem gewissen n an $h_n < l'_n$ ist; hier setzt man $\omega < \omega'$.

3. Wenn keine der beiden vorhergehenden Möglichkeiten vorhanden ist, hat man also, für jedes n, $h_n \geqq l'_n$ und $h'_n \geqq l_n$.

Setzt man nun $h_n - l_n = \delta$, $h'_n - l'_n = \delta'$, so ergibt die Identität

$$(h'_n - l_n) + (h_n - l'_n) = (h_n - l_n) + (h'_n - l'_n) = \delta + \delta',$$

weil keine der Differenzen $(h'_n - l_n)$ und $(h_n - l'_n)$ negativ sein kann

$$h_n - l'_n \leqq \delta + \delta', \quad h'_n - l_n \leqq \delta + \delta'; \tag{3}$$

weiter hat man wegen § 1, (3)

$$h_n - h'_n < (h_n - l_n) + (h'_n - l_n)$$
$$l_n - l'_n < (h_n - l_n) + (h_n - l'_n),$$

woraus wegen (3)

$$h_n - h'_n| \leqq 2\delta + \delta', \quad l_n - l'_n| \leq \delta + 2\delta' \tag{4}$$

hervorgeht; die beiden Differenzen $h_n - h'_n$ und $l_n - l'_n$ streben daher dem Grenzwerte Null zu, wenn n über jede Grenze hinauswächst.

In ganz derselben Weise sieht man ein, daß, wenn *eine* der vier Differenzen

$$h_n - l'_n, \quad h'_n - l_n, \quad h_n - h'_n, \quad l_n - l'_n$$

gegen Null konvergiert, falls n über jede Grenze hinauswächst, die drei anderen dieselbe Eigenschaft besitzen.

Die beiden Grenzzahlen ω und ω' werden in diesem Falle gleich groß genannt, und man setzt auch hier $\omega = \omega'$.

Aus der Definition der Ungleichheit zweier Grenzzahlen erhält man unmittelbar den Satz:

I. *Sind* ω, ω' *und* ω'' *willkürliche Grenzzahlen und hat man gleichzeitig* $\omega > \omega'$, $\omega' > \omega''$, *so ist auch* $\omega > \omega''$.

Wird nämlich ω'' durch die Annäherungsreihen (H'') und (L''), ω und ω' wie vorher durch (1) und (2) definiert, so hat man $l_n > h'_n > l'_n$ und $l'_n > h''_n$, woraus $l_n > h''_n$ folgt, und demnach ist $\omega > \omega''$.

Durch die Überlegungen im Falle 3° ergibt sich ebenfalls:

II. *Sind* ω, ω' *und* ω'' *drei willkürliche Grenzzahlen, und hat man* $\omega = \omega'$, $\omega'' = \omega''$, *so ist auch* $\omega = \omega''$.

Beispiel 1. Die rationale Zahl a kann z. B. als Grenzzahl dargestellt werden, indem man $h_n = a + 10^{-n}$, $l_n = a$ setzt; durch Vergleichung mit der durch (2) definierten Grenzzahl ω' hat man daher $a \gtrless \omega'$, je nachdem von einem gewissen n an $a > h_n$ oder $a < l_n$ ist; findet keine dieser Ungleichheiten statt, so hat man $a = \omega'$.

Beispiel 2. Die Zahl 0 kann als Grenzzahl dargestellt werden, indem man z. B. $h'_n = 2^{-n}$, $l'_n = -2^{-n}$ setzt; man findet daher $\omega \gtrless 0$, je nachdem von einem gewissen n an $l_n > 0$ oder $h_n < 0$ ist; findet keine dieser Ungleichungen statt, so hat man $\omega = 0$.

Man nennt die Grenzzahl ω positiv oder negativ, je nachdem $\omega \gtrless 0$ ist; findet keine dieser Ungleichungen statt, so hat man $\omega = 0$.

Es bleibt uns noch übrig den absoluten Betrag einer Grenzzahl zu definieren; durch Anwendung der für rationale Zahlen eingeführten Bezeichnung setzt man $|\omega| = \omega$, wenn die Grenzzahl ω positiv oder Null ist; für negative ω wird $|\omega|$ als diejenige durch die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} -l_0, & -l_1, & -l_2, \cdots, & -l_n, \cdots \\ -h_0, & -h_1, & -h_2, \cdots, & -h_n, \cdots \end{cases} \tag{5}$$

definierte Grenzzahl, wenn ω durch die Reihen (1) bestimmt wird, definiert.

Da unsere vorhergehenden Betrachtungen für *sämtliche* Grenzzahlen, also auch speziell für die rationalen Zahlen, gelten, so liegt auf der Hand, daß unsere Definitionen und Bezeichnungen in solcher Weise gewählt worden sind, daß sie direkte Erweiterungen der entsprechenden für rationale Zahlen gebrauchten, bilden.

§ 6. Rechnen mit Grenzzahlen.

Die für rationale Zahlen definierten Rechnenoperationen sind in folgender Weise für *willkürliche* Grenzzahlen zu erweitern:

Es seien ω und ω' zwei willkürliche, rationale oder irrationale Grenzzahlen, die durch die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} h_0, & h_1, & h_2, \cdots, & h_n, \cdots \\ l_0, & l_1, & l_2, \cdots, & l_n, \cdots \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} h'_0, & h'_1, & h'_2, \cdots, & h'_n, \cdots \\ l'_0, & l'_1, & l'_2, \cdots, & l'_n, \cdots \end{cases} \tag{2}$$

bestimmt werden; dann sind die Summe $\omega + \omega'$ und die Differenz $\omega - \omega'$ durch die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} h_0 + h'_0, & h_1 + h'_1, & h_2 + h'_2, \cdots, & h_n + h'_n, \cdots \\ l_0 + l'_0, & l_1 + l'_1, & l_2 + l'_2, \cdots, & l_n + l'_n, \cdots \end{cases} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} &h_0 - l'_0, \; h_1 - l'_1, \; h_2 - l'_2, \; \ldots, \; h'_n - l'_n, \; \ldots \\ &l_0 - h'_0, \; l_1 - h'_1, \; l_2 - h'_2, \; \ldots, \; l_n - h'_n, \; \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

zu definieren. Ist $\omega + \omega' = 0$, setzt man $\omega' = -\omega$; die Zahl $-\omega$ wird daher durch die Annäherungsreihen

$$\begin{aligned} &-l_0, \; -l_1, \; -l_2, \; \ldots, \; -l_n, \; \ldots \\ &-h_0, \; -h_1, \; -h_2, \; \ldots, \; -h_n, \; \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

definiert, und somit hat man wegen § 5, (5) für ω negativ

$$|\omega| = -\omega. \tag{6}$$

Um das Produkt $\omega \cdot \omega'$ und den Quotient $\omega : \omega'$ zu definieren, setzen wir vorläufig die beiden Grenzzahlen ω und ω' als *positiv* voraus; dann sind $\omega \cdot \omega'$ und $\omega : \omega'$ durch die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} h_0 h_0', \ h_1 h_1', \ h_2 h_2', \ \ldots, \ h_n h_n', \ \ldots \\ l_0 \, l_0', \ l_1 \, l_1', \ l_2 \, l_2', \ \ldots, \ l_n \, l_n', \ \ldots \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} h_0 : l_0', \ h_1 : l_1', \ h_2 : l_2', \ \ldots, \ h_n : l_n', \ \ldots \\ l_0 : h_0', \ l_1 : h_1', \ l_2 : h_2', \ \ldots, \ l_n : h_n', \ \ldots \end{cases} \tag{8}$$

zu bestimmen.

Die Definitionen für Produkt und Quotient können nun ganz in derselben Weise wie bei rationalen Zahlen zu denjenigen Fällen erweitert werden, wo entweder eine oder zwei der Zahlen ω und ω' *negativ* sind; man bildet in der Tat den vorhergehenden Definitionen zufolge das Produkt oder den Quotient der absoluten Beträge $|\omega|$ und $|\omega'|$ und bestimmt in gewöhnlicher Weise das Zeichen dieser Zahlen.

Ist $\omega \neq 0$ aber $\omega' = 0$, so hat man $\omega : \omega' = \infty$.

Die so definierten Rechnenoperationen gelten für *alle* Grenzzahlen, also auch für die *rationalen* Zahlen; es liegt dann auf der Hand, daß die vorhergehenden Definitionen in solcher Weise gewählt worden sind, daß sie direkte Erweiterungen der entsprechenden Definitionen für rationale Zahlen sind, d. h. daß diese Rechnenoperationen, für rationale Zahlen, mit den elementaren zusammenfallen.

Weiter sieht man ein, daß sämtliche Eigenschaften der elementaren Rechnenoperationen ungeändert für das Rechnen mit willkürlichen Grenzzahlen gelten, nämlich:

1. *Das kommutative Prinzip* der Addition und Multiplikation:

$$\omega + \omega' = \omega' + \omega, \ \omega \cdot \omega' = \omega' \cdot \omega. \tag{9}$$

2. *Das assoziative Prinzip* der Addition und Multiplikation:

$$\begin{cases} (\omega + \omega') + \omega'' = \omega + (\omega' + \omega'') = \omega + \omega' + \omega'' \\ (\omega \cdot \omega') \, \omega'' = \omega \, (\omega' \cdot \omega'') = \omega \, \omega' \, \omega''. \end{cases} \tag{10}$$

3. *Das distributive Prinzip* der Multiplikation:

$$\omega(\omega' + \omega'') = \omega\omega' + \omega\omega''. \tag{11}$$

Diese Prinzipe gelten ja in der Tat für sämtliche Elemente der definierenden Annäherungsreihen.

Weiter ergibt sich, daß die Gleichungen

$$\omega + x = \omega', \quad \omega \cdot x = \omega', \tag{12}$$

wo in der letzten $\omega \neq 0$ angenommen wird, eine und nur eine Lösung von x liefern, wenn ω und ω' aufgegeben sind. Setzt man

speziell $\omega' = \omega$, so erhält man bzw. $x = 0$ und $x = 1$, und diese Lösungen sind dieselben, ob die Zahl ω rational oder irrational angenommen wird.

Bedeutet ω eine willkürliche Grenzzahl, während n positiv ganz ist, so setzt man auch hier

$$\omega^n = \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \cdots \quad (n \text{ Faktoren}); \tag{13}$$

sämtliche Sätze über Potenzen mit *ganzen* Exponenten, die für rationale Wurzeln bewiesen worden sind, gelten daher ungeändert, wenn die Wurzeln willkürliche Grenzzahlen sind.

Die Binomialformel für $(a + b)^n$, n positiv ganz, und die in §§ 1 und 2 entwickelten Formeln für den absoluten Betrag, für die Potenz a^n und für die geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + \cdots$$

gelten daher auch ungeändert, wenn die Zahlen a, b und q ganz willkürliche Grenzzahlen sind.

Diese Bemerkungen erlauben uns einen sehr allgemeinen Grenzsatz über *rationale* Funktionen zu beweisen.

Eine ganze rationale Funktion von x oder ein ganzes Polynom in x ist ein Ausdruck von der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_p x^{n-p} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

wo die Koeffizienten a_p sämtlich von x *unabhängig* sind. Eine ganze rationale Funktion in x_1 und x_2 ist ein ganzes Polynom in x_2, dessen Koeffizienten sämtlich ganze rationale Funktionen in x_1 sind usw. Eine ganze rationale Funktion in $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n$, ist ein ganzes Polynom in x_n, dessen Koeffizienten ganze rationale Funktionen in $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_{n-1}$ sind.

Der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen in $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n$ wird eine *gebrochene* rationale Funktion dieser n Größen genannt.

Mit dieser Definition hat man dann unmittelbar den Satz:

I. *Ist* $F(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ *eine in* $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$ *ganz willkürliche rationale Funktion, während die* ω_r *Grenzzahlen bezeichnen, die für* $r = 1, 2, 3, \cdots, n$ *durch die Annäherungsreihen* $(H^{(r)})$ *und* $(L^{(r)})$ *definiert werden, so hat man allgemein*

$$\begin{cases} F(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = \lim\limits_{p=\infty} F(h_p^{(1)}, h_p^{(2)}, \cdots, h_p^{(n)}) \\ F(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = \lim\limits_{p=\infty} F(l_p^{(1)}, l_p^{(2)}, \cdots, l_p^{(n)}), \end{cases} \tag{14}$$

vorausgesetzt, daß $F(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ *den Divisor „Null" nicht enthält.*

8. Es ist zu beweisen, daß das Produkt

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}\cdots$$

mit der Anzahl der Faktoren über jede Grenze hinauswächst; dies Produkt ist durch einen ganz formalen Fehler von *Vieta*[1]) als Ausdruck für $2:\pi$ angegeben worden.

9. Benutzt man die für den Kettenbruch § 4, (4) eingeführten Bezeichnungen, und setzt man, für jedes n, $a_n = 1$, so hat man die beiden Formeln

$$y_n = z_{n+1},\quad y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

zu beweisen und dadurch für $n = \infty$ den Grenzwert von $y_n : z_n$ zu ermitteln.

10. Für den durch $a_0 = 0$, $a_n = 2$ für $n \geq 1$ gebildeten Kettenbruch hat man die beiden Formeln

$$y_n = z_{n-1},\quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$$

zu beweisen und für $n = \infty$ den Grenzwert von $y_n : z_n$ zu bestimmen.

§ 7. Sätze über Grenzzahlen.

Als Anwendungen unserer Definitionen der elementaren Rechnenoperationen mit Irrationalzahlen haben wir nunmehr über willkürliche Grenzzahlen eine Reihe von Sätzen zu entwickeln, die für unsere folgenden Untersuchungen unentbehrlich sind.

I. *Eine willkürliche positive Grenzzahl kann in einen unendlichen Dezimalbruch, dessen Ziffern von einer gewissen Stelle an nicht sämtlich Null sind, entwickelt werden.*

Ist die durch die Annäherungsreihen

$$\begin{matrix} h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n,\ \cdots \\ l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n,\ \cdots \end{matrix} \tag{1}$$

definierte Grenzzahl ω rational, so folgt der Satz unmittelbar aus den in § 3 gegebenen Entwicklungen. Ist aber ω irrational, so werden die rationalen Zahlen h_n und l_n in Dezimalbrüche der obengenannten Art entwickelt; ist dann δ_n derjenige *endliche* Dezimalbruch, dessen Ziffern die für die Dezimalbrüche h_n und l_n gemeinsamen Ziffern sind, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl N zu

1) Opera mathematica, p. 400; Leiden 1646.

bestimmen, daß δ_n für $n \geqq N$ beliebig viele Ziffern enthält. Weiter hat man

$$\delta_n \leqq l_n, \quad h_n \leqq \delta_n + \frac{1}{10^p},$$

wenn p die Zahl der Dezimalen in δ_n bezeichnet; es ist demnach auch

$$\delta_n < \omega < \delta_n + \frac{1}{10^p}, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = \omega.$$

Diesen Satz verdankt man *Stolz*[1]).

II. *Eine willkürliche irrationale Grenzzahl ω kann in einen unendlichen Kettenbruch von der Form*

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}, \tag{2}$$

wo a_0 ganz, a_n aber für $n \geqq 1$ positiv ganz ist, entwickelt werden.

Die Zahl a_0 wird durch die Ungleichungen

$$a_0 < \omega < a_0 + 1$$

bestimmt; setzt man demnach

$$\omega = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \frac{1}{\omega - a_0} > 1,$$

so wird x_1 wegen (1) durch die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} \dfrac{1}{l_m - a_0}, & \dfrac{1}{l_{m+1} - a_0}, \cdots \dfrac{1}{l_{m+p} - a_0}, \cdots \\ \dfrac{1}{h_m - a_0}, & \dfrac{1}{h_{m+1} - a_0}, \cdots \dfrac{1}{h_{m+p} - a_0}, \cdots \end{cases} \tag{3}$$

definiert, indem m so zu wählen ist, daß $l_m > a_0$ wird. Die positive ganze Zahl a_1 wird dann durch die Ungleichungen

$$a_1 < x_1 < a_1 + 1$$

bestimmt usw. Aus den Sätzen über endliche Kettenbrüche in Verbindung mit den Bemerkungen in § 4, Beispiel 2 geht dann deutlich hervor, daß man wirklich durch das obige Verfahren die Gleichung (2) erhält.

III. *Bezeichnen ω und ω' zwei willkürliche endliche Grenzzahlen, jedoch so, daß $\omega \neq 0$ ist, so kann man eine solche endliche von Null verschiedene rationale Zahl k bestimmen, daß*

$$| k\omega - \omega' | < \varepsilon \tag{4}$$

wird, indem ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe bezeichnet.

1) Allgemeine Arithmetik Bd. I, p. 119; Leipzig 1883.

Ist ω die durch (1) bestimmte Grenzzahl, während ω' durch die Annäherungsreihen

$$\begin{matrix} \{ h_0', & h_1', & h_2', & \cdots, & h_n', & \cdots \\ \{ l_0', & l_1', & l_2', & \cdots, & l_n', & \cdots \end{matrix} \tag{5}$$

definiert wird, so multipliziert man die Ungleichungen $h_n > \omega > l_n$ mit der Zahl $k = h_j' : l_n$, dann erhält man, je nachdem $k \gtrless 0$ ist

$$h_j' + \frac{h_n - l_n}{l_n} \cdot h_q' \gtrless k\omega \gtrless h_q',$$

woraus folgt:

$$h_q' - \omega' + \frac{h_n - l_n}{l_n} \cdot h_q' \gtrless k\omega - \omega' \gtrless h_q' - \omega'; \tag{6}$$

da nun die Ungleichungen (6) für alle endliche Werte der beiden Stellenzeiger n und q richtig bleiben, ist unser Satz damit bewiesen.

IV. *Sind ω und ω' zwei willkürliche endliche Grenzzahlen, so daß ω irrational ist, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl K zu bestimmen, daß*

$$| K\omega - \omega' - p | < \varepsilon \tag{7}$$

wird, indem p eine passende ganze Zahl ist, während ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe bezeichnet.

Wir setzen vorläufig ω *positiv* voraus und bezeichnen durch $A_n : B_n$ einen Annäherungsbruch desjenigen Kettenbruchs von der Form (2), welcher ω darstellt; dann sind A_n und B_n beide positiv ganz, und es ist für jedes n

$$\omega - \frac{A_n}{B_n} < \frac{1}{B_n^2}; \tag{8}$$

da es nun möglich ist n so groß zu wählen, daß $B_n \cdot \varepsilon > 1$ wird, so erhält man aus (8) durch Multiplikation mit B_n:

$$| B_n\omega - A_n | < \varepsilon. \tag{9}$$

Betrachten wir nun die negative Grenzzahl $-\omega$, während A_n und B_n dieselbe Bedeutung wie vorher haben, so erhält man aus (9)

$$| -\omega B_n + A_n | < \varepsilon;$$

es ist demnach immer möglich zwei solche ganze Zahlen A_n und B_n, von welchen die letzte positiv ist, zu bestimmen, daß die Ungleichung (9) richtig bleibt, wenn nur ω eine endliche irrationale Zahl ist.

Betrachten wir nunmehr für ein bestimmtes n diejenige arithmetische Reihe, deren Glieder durch die Ausdrücke $qB_n\omega - qA_n$, q willkürlich ganz, bestimmt sind, so ist die Differenz dieser Reihe für jedes endliche n von Null verschieden, weil ω irrational vorausgesetzt wird, und andererseits ist der absolute Betrag dieser Differenz

wegen (9) kleiner als ε. Weiter muß ω' entweder ein Glied in dieser arithmetischen Reihe darstellen oder zwischen zwei solche Glieder fallen.

Hat man $\omega' = qB_n\omega - qA_n$, und setzt man $qB_n = K$, $qA_n = p$, so erhält man $K\omega - \omega' - p = 0$; ist andererseits ω' zwischen demselben betrachteten Glied und dem nächstfolgenden gelegen, so ist mit denselben Bezeichnungen $|K\omega - \omega' - p| < \varepsilon$, und damit ist unser Satz bewiesen.

Aus I. erhält man endlich den fundamentalen Satz:

V. *Sind*

$$\begin{matrix} \omega_0, & \omega_1, & \omega_2, & \cdots, & \omega_n, & \cdots \\ \omega_0', & \omega_1', & \omega_2', & \cdots, & \omega_n', & \cdots \end{matrix} \tag{10}$$

zwei Folgen willkürlicher Grenzzahlen, die den folgenden Bedingungen

$$\omega_{n+1} \leq \omega_n,\ \omega_{n+1}' > \omega_n',\ \omega_n > \omega_n' \tag{11}$$

für jedes n genügen, während es möglich ist eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geq N$ immer

$$\omega_n - \omega_n' < \varepsilon \tag{12}$$

wird, so existiert eine ganz bestimmte Grenzzahl ω'', die den Bedingungen

$$\omega_n \geqq \omega'' \geqq \omega_n' \tag{13}$$

für jedes n genügt.

Wir können uns offenbar auf denjenigen Fall beschränken, wo die Zahlen ω_n und ω_n' sämtlich positiv und als Dezimalbrüche dargestellt sind; bezeichnet dann h_n den endlichen Dezimalbruch, der aus den für ω_n und ω_{n+1} gemeinsamen ersten Ziffern von der nächsten Ziffer in ω_n nachgefolgt gebildet wird, während l_n als der endliche Dezimalbruch, der aus den für ω_n' und ω_{n+1}' gemeinsamen ersten Ziffern von der nächsten Ziffer in ω_{n+1}' nachgefolgt definiert wird, so hat man die Ungleichungen

$$\omega_n \geqq h_n \geqq \omega_{n+1},\ \omega_{n+1}' > l_n > \omega_n',\ \omega_n \geqq h_n > l_n > \omega_n'.$$

Die durch die Annäherungsreihen

$$\begin{matrix} h_0, & h_1, & h_2, & \cdots, & h_n, & \cdots \\ l_0, & l_1, & l_2, & \cdots, & l_n, & \cdots \end{matrix}$$

definierte Grenzzahl ω'' genügt dann für jedes n den Bedingungen

$$\omega > h_n > \omega'' \geqq l_n \geqq \omega_n'.$$

Dieser Satz zeigt deutlich, daß man wohl die Theorie der Annäherungsreihen mit rationalen Elementen auf solche mit irratio-

nalen Elementen ausdehnen kann, daß man aber dadurch den Zahlenbegriff *nicht* erweitern kann.

---

11. Es ist eine solche positive ganze Zahl K zu bestimmen, daß

$$|K\sqrt{2}-\sqrt{3}-p|<\frac{1}{10^4}$$

wird, indem p eine passende ganze Zahl bezeichnet.

12. Definiert man die positiven Zahlen $a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n\ \cdots$, so daß $a_1=+\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+a_1}$ und allgemein $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ ist, so hat man die für jedes endliche n gültigen Ungleichungen

$$2>a_{n+1}>a_n,\quad 6+a_n>4a_{n+1}$$

zu beweisen.

13. Setzt man mit den Bezeichnungen in Aufgabe 12 für jedes n

$$\omega_n=\frac{2^{n+1}\sqrt{2-a_n}}{a_{n+1}},\quad \omega_n'=2^n\sqrt{2-a_n},$$

so ist zu beweisen, daß die dadurch definierten Zahlenfolgen den Bedingungen § 7, (11) und (12), Genüge leisten.

§ 8. Allgemeine Bemerkungen.

Weitergehende Untersuchungen über Grenzzahlen führen ganz natürlich zur Lösung der folgenden zwei Aufgaben:

1. Man soll die Existenz einer Grenzzahl, die gewissen Bedingungen genügt, durch Herleitung von Annäherungsreihen, die diese Zahl definieren, beweisen.

2. Man soll die Eigenschaften einer durch Annäherungsreihen definierten Grenzzahl bestimmen.

In unseren folgenden Untersuchungen haben wir mehrmals die erste Aufgabe zu lösen; die zweite ist aber im allgemeinen viel schwieriger; dies liegt auf der Hand, wenn wir nur bemerken, daß dieselbe Grenzzahl durch unzählige Paare von Annäherungsreihen definiert werden kann, während ein vorgegebenes Paar von solchen Reihen eine ganz bestimmte Grenzzahl definiert.

Wie wir in § 9 sehen werden, ist unsere Definition einer Irrationalzahl als ein Spezialfall derjenigen von *G. Cantor*[1]) gegebenen anzusehen.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 128; 1872. *Heine* im Journal für Math. Bd. 74, p. 174 f. 1872. Ch. Méray in Nouveau précis d'analyse infinitésimale, Paris 1872.

Dedekind[1]) hat einen ganz anderen Weg eingeschlagen bei der von ihm gegebenen Definition, indem er sich alle möglichen *rationalen* Zahlen in zwei Gruppen A und B eingeteilt denkt, so daß jede Zahl in A kleiner ist als jede in B enthaltene Zahl. Wenn man dann in A keine Zahl auffinden kann, die *größer* ist als die übrigen, oder in B keine, die *kleiner* ist als die übrigen in B sich befindenden Zahlen, so schlägt er als Definition vor, daß diese Teilung in zwei Gruppen A und B, dieser „Schnitt", eine irrationale Zahl bestimmt, die größer als jede Zahl in A, aber kleiner als jede Zahl in B ist.

Es liegt also auf der Hand, daß unsere Annäherungsreihen eine *eindeutige* Bestimmung der obengenannten Gruppen A und B gestatten, wenn die durch die Annäherungsreihen definierte Grenzzahl eine *irrationale* ist. A enthält nämlich dann alle diejenigen rationalen Zahlen, die nicht *größer* als die Zahlen l_n sind, B aber diejenigen, die nicht *kleiner* als die Zahlen h_n sind.

Kapitel III.

Theorie der reellen Zahlenfolgen.

§ 9. Das Verhalten einer Zahlenfolge.

Wir haben nunmehr unsere in § 2 gemachten Bemerkungen über rationale Zahlenfolgen dahin zu verallgemeinern, daß sie für jede Folge rationaler oder irrationaler Zahlen:

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

gültig sind.

Unseren vorhergehenden Entwicklungen zufolge liegt auf der Hand, daß die allgemeine Zahlenfolge (1) immer einer der drei folgenden Bedingungen Genüge leisten muß:

1. *Konvergente Zahlenfolgen oder Fundamentalreihen.* Es existiert eine solche endliche und bestimmte Zahl A, daß es möglich ist für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe ε eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geq N$ immer

$$|A - a_n| < \varepsilon \tag{2}$$

wird. Die Folge (1) heißt dann eine konvergente Zahlenfolge oder eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte A, und man setzt

$$A = \lim_{n=\infty} a_n. \tag{3}$$

---

1) Stetigkeit und irrationale Zahlen; 1872 (dritte Ausg. 1905).

Entwickelt man die positiven Zahlen a_n | in Dezimalbrüche, so erhält man den Satz:

I. *Der Grenzwert einer Fundamentalreihe ist eine gewöhnliche, rationale oder irrationale Grenzzahl, die auch durch Annäherungsreihen definiert werden kann.*

Beispiel 1. Annäherungsreihen, die eine endliche Grenzzahl definieren sind Fundamentalreihen mit der Grenzzahl als Grenzwert. Dasselbe gilt für diejenigen unendlichen Zahlenfolgen, die in willkürlicher Weise aus Zahlen h_n und l_n gebildet sind.

Was die allgemeine Fundamentalreihe (1) betrifft, so bemerken wir, daß die Differenz $A - a_n$ selbst für willkürlich große n bald positiv bald negativ sein kann, und daß der absolute Betrag von $A - a_n$ nicht immer mit wachsendem n abnehmen muß.

Beispiel 2. Setzt man für $n \geqq 1$

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n'},$$

wo $n' = n$ ist, wenn n keine Quadratzahl bezeichnet, aber $n' = +\sqrt{n}$ sein soll, wenn n quadratisch ist, so hat diese Fundamentalreihe den Grenzwert 1.

Beispiel 3. Die Zahlenfolge, deren Elemente für $n \geqq 1$ durch die Ausdrücke

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n}$$

gebildet werden, hat lauter irrationale Elemente aber den rationalen Grenzwert 1.

2. *Divergente Zahlenfolgen.* Wenn es möglich ist für eine vorgegebene willkürlich große positive Zahl E eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$|a_n| > E \tag{4}$$

wird, so heißt unsere Zahlenfolge (1) *divergent*, und zwar *eigentlich* oder *uneigentlich* divergent, je nachdem die a_n von einem gewissen n an sämtlich dasselbe Vorzeichen haben oder nicht. Ist unsere Folge eigentlich divergent, so setzen wir auch

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty, \text{ bzw. } \lim_{n=\infty} a_n = -\infty. \tag{5}$$

Die Schreibweise

$$\lim_{n=\infty} a_n = A$$

bedeutet daher ausschließlich, daß entweder A endlich und bestimmt oder unendlich groß mit bestimmtem Vorzeichen ist.

In betreff der Beispiele divergenter Zahlenfolgen verweisen wir auf § 2.

3. *Oszillierende Zahlenfolgen.* Wenn die Zahlenfolge (1) weder konvergiert noch divergiert, so heißt sie *oszillierend;* die Begriffe Oszillation zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen werden hier ganz wie in § 2 definiert.

Dem Satze I und den Definitionen der elementaren Rechnenoperationen zufolge finden wir hier unmittelbar den folgenden wichtigen Satz:

II. *Haben die Fundamentalreihen*

$$\begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, & \dots, & u_n, & \dots \\ v_0, & v_1, & v_2, & \dots, & v_n, & \dots \end{cases} \tag{6}$$

die Grenzwerte U und V, so sind die Zahlenfolgen

$$u_0 \pm v_0,\ u_1 \pm v_1,\ u_2 \pm v_2, \dots, u_n \pm v_n, \dots \tag{7}$$

$$u_0 v_0,\ u_1 v_1,\ u_2 v_2, \dots, u_n v_n, \dots \tag{8}$$

$$u_0 : v_0,\ u_1 : v_1,\ u_2 : v_2, \dots, u_n : v_n, \dots \tag{9}$$

auch Fundamentalreihen und ihre Grenzwerte sind bzw. $U \pm V$, $U V$ und $U : V$, vorausgesetzt doch, daß in (9) *V von der Null verschieden angenommen wird.*

Aus II findet man nun ohne weiteres den noch allgemeineren Satz:

III. *Bezeichnet $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$ eine willkürliche rationale Funktion von $x_1, x_2, \dots, x_r$, und sind $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(r)}$ die Elemente der r Fundamentalreihen mit den Grenzwerten $U_1, U_2, \dots, U_r$, so hat man allgemein*

$$F(U_1, U_2, \dots, U_r) = \lim_{n=\infty} F(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(r)}), \tag{10}$$

vorausgesetzt jedoch, daß F den Divisor „Null" nicht enthält.

---

14. Man soll die Zahlenfolge, deren Elemente für positive ganze n durch die Ausdrücke

$$a_n = \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

bestimmt werden, untersuchen.

15. Aus den beiden Zahlen a_1 und a_2 wird eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \tag{1}$$

nach dem Gesetze gebildet, daß a_n von $n = 3$ an das arithmetische Mittel der zwei vorhergehenden ist, also $2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; man hat dann die allgemeine Formel

$$a_n = \frac{a_1}{3}\left(1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{a_2}{3}\left(2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$

zu beweisen und den Grenzwert der Zahlenfolge (1) zu bestimmen.

§ 10. Das allgemeine Konvergenzprinzip für Zahlenfolgen.

Man beweist nun ohne Schwierigkeit den folgenden allgemeinen Satz, der von *P. du Bois Reymond*[1]) als allgemeines Konvergenzprinzip (für Zahlenfolgen) bezeichnet wird:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Zahlenfolge*

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

besteht darin, daß es möglich ist für eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe ε eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

(2) $$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

wird, indem p eine willkürliche positive ganze Zahl bezeichnet.

Es liegt auf der Hand, daß (2) eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz der Zahlenfolge (1) ist; denn wird N so bestimmt, daß für $n \geqq N$ immer

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird, indem A den Grenzwert der Fundamentalreihe bedeutet, so hat man

$$|a_{n+p} - a_n| \leqq |a_{n+p} - A| + |a_n - A| < \varepsilon.$$

Um nun zu zeigen, daß (2) auch eine *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz unserer Zahlenfolge ist, geben wir eine von Null verschiedene positive Größe ϱ an und bestimmen die entsprechende positive ganze Zahl N, so daß für $n \geqq N$ immer

$$|a_{n+p} - a_n| < \varrho$$

ist, welches ja der Bedingung (2) zufolge immer möglich ist. Für jedes Element der Zahlenfolge (1) erhält man dann für $q > N$ immer

(3) $$a_N - \varrho < a_q < a_N + \varrho.$$

Ist dann weiter N_1 eine solche positive ganze Zahl, daß für $n \geqq N_1$ immer

$$|a_{n+p} - a_n| < \varrho_1 < \tfrac{1}{2}\varrho$$

1) Allgemeine Funktionentheorie Bd. I, p. 6, 260. Tübingen 1882.

ist, so hat man auch für $q > N_1$ immer

$$a_{N_1} - \varrho_1 < a_q < a_{N_1} + \varrho_1;$$

hat man ebenfalls für $n \geqq N_2$ immer

$$| a_{n+p} - a_n | < \varrho_2 \leqq \tfrac{1}{2}\,\varrho_1 \leqq \tfrac{1}{4}\,\varrho_1$$

so ergibt sich für $q > N_2$

$$a_{N_2} - \varrho_2 < a_q < a_{N_2} + \varrho_2;$$

dies Verfahren kann offenbar unbegrenzt oft angewendet werden.

Setzt man demnach $h_0 = a_N + \varrho$, $l_0 = a_N - \varrho$, und bezeichnet h_q für $q = 1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ die *kleinste* der Zahlen

$$a_{N_1} + \varrho_1,\ a_{N_2} + \varrho_2,\ \ldots,\ a_{N_q} + \varrho_q,$$

l_q dagegen die *größte* der Zahlen

$$a_{N_1} - \varrho_1,\ a_{N_2} - \varrho_2,\ \ldots,\ a_{N_q} - \varrho_q,$$

so genügen die Zahlenfolgen

$$\begin{cases} h_0,\ h_1,\ h_2, \ldots,\ h_q, \ldots \\ l_0,\ l_1,\ l_2, \cdots,\ l_q, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

für jedes q den Bedingungen

$$h_q > l_q,\ h_{q+1} < h_q,\ l_{q+1} \geqq l_q,\ h_q - l_q \leqq \frac{\varrho}{2^q}.$$

Dem Satze § 7, V und der Definition § 9, (5) zufolge definieren die Zahlenfolgen (4) eine ganz bestimmte Grenzzahl. Bedeutet weiter n eine willkürliche positive ganze Zahl, so ist es doch möglich einen solchen Stellenzeiger q zu bestimmen, daß alle die folgenden Elementen

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \ldots$$

der Folge (1) zwischen h_q und l_q liegen. Die Zahlenfolge (1) ist daher eine Fundamentalreihe mit der durch (4) definierten Grenzzahl als Grenzwert.

Aus diesen Bemerkungen kann man nun ohne weiteres die beiden anderen Sätze herleiten:

II. *Bedeutet n eine solche Zahl, daß die Ungleichung* (2) *für alle größeren Werte des Stellenzeigers richtig ist, so hat man für $q > n$ und $r > n$ immer $| a_q - a_r | < 2\,\varepsilon$, und indem A den Grenzwert der Fundamentalreihe* (1) *bezeichnet, ist $| A - a_q | < 2\,\varepsilon$, indem $q > n$ angenommen wird.*

III. *Wählt man unter den Elementen der Fundamentalreihe* (1) *eine willkürliche unendliche Folge*

$$a_{m_1},\ a_{m_2},\ a_{m_3},\ \ldots,\ a_{m_p},\ \ldots \tag{5}$$

aus, so ist diese Zahlenfolge wieder eine Fundamentalreihe mit demselben Grenzwerte wie die ursprüngliche Fundamentalreihe (1) *selbst.*

Der Fundamentalsatz I, der zuerst von Bolzano[1]), etwas später von Cauchy[2]) und Abel[3]) hervorgehoben worden ist, wurde lange Zeit hindurch als einleuchtend angenommen; erst durch eine systematische Theorie der Irrationalzahlen ist es möglich geworden diesen Satz in aller Strenge zu beweisen. Cantor[4]) benutzt den Satz I als Definition der Irrationalzahlen, indem dann natürlich sämtliche Elemente der Fundamentalreihe *rational* sind.

---

16. Es ist zu beweisen, daß die Zahlenfolge, deren Elemente für positive ganze n durch die Ausdrücke bestimmt werden

$$a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

eine Fundamentalreihe ist, und daß ihr Grenzwert zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$ liegt.

§ 11. **Monotone Zahlenfolgen.**

Ist für die Elemente der Zahlenfolge

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

immer entweder $a_{n+1} \geq a_n$ oder $a_{n+1} \leqq a_n$, so nennt man diese Folge *monoton wachsend* bzw. *monoton abnehmend.*

Alle Annäherungsreihen sind daher monotone Zahlenfolgen, die Reihen (L) monoton wachsend, die Reihen (H) monoton abnehmend.

Über monotone Zahlenfolgen gilt der Satz:

I. *Eine monotone Zahlenfolge muß immer entweder konvergieren oder eigentlich divergieren, kann also niemals oszillieren.*

Wir können uns offenbar darauf beschränken eine monoton wachsende Zahlenfolge zu betrachten; denn ändert man das Zeichen der Elemente einer monoton abnehmenden Folge, so erhält man eine monoton wachsende.

Es sei nun (1) eine monoton wachsende *nicht* konvergente Zahlenfolge; es ist dann dem allgemeinen Konvergenzprinzip zufolge möglich eine derartige von 0 verschiedene positive Größe g zu bestimmen, daß, wenn n eine willkürliche vorgegebene positive ganze

---

1) 1817. Vgl. Stolz in Mathematische Annalen Bd. 18, p. 259; 1881.
2) Analyse algébrique p. 125; 1821.
3) Œuvres Bd. II, p. 197.
4) Mathematische Annalen Bd. 21, p. 124; 1883.

Zahl bezeichnet, man eine solche positive ganze Zahl $n_1 > n$ bestimmen kann, daß

$$a_{n_1} - a_n > g$$

wird.

Bestimmt man nun weiter die positiven ganzen Zahlen n_2, n_3, n_4, . . ., so daß immer

$$a_{n_2} - a_{n_1} > g,\ a_{n_3} - a_{n_2} > g,\ \ldots,\ a_{n_p} - a_{n_{p-1}} > g$$

ist, und addiert man diese Ungleichungen, so erhält man

$$a_{n_p} > a_n + p \cdot g.$$

Da p aber beliebig groß angenommen werden darf, muß a_m mit m über jede Grenze hinauswachsen und unsere Zahlenfolge (1) ist demnach eigentlich *divergent*.

Eine monotone Zahlenfolge ist daher stets konvergent, wenn nur $|a_n|$ eine gewisse endliche Grenze nicht übersteigt, wie groß n auch angenommen wird.

Die Bezeichnung monoton in dieser Bedeutung rührt von C. Neumann[1]) her.

---

17. Es ist zu beweisen, daß die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

konvergiert, und daß ihr Grenzwert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen muß.

18. Es ist zu beweisen, daß die Zahlenfolge

$$|\sqrt{2}|,\ |\sqrt[3]{3}|,\ |\sqrt[4]{4}|, \ldots, |\sqrt[n]{n}| \ldots$$

monoton abnimmt und den Grenzwert 1 hat.

19. Man hat zu beweisen, daß die beiden Zahlenfolgen mit dem allgemeinen Elemente

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$b_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

konvergieren, und daß die erste den Grenzwert 1 hat.

---

1) Über die nach Kreis-, Kugel und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, p. 26. Leipzig 1881.

§ 12. Häufungsstellen einer Zahlenfolge.

Die Zahl ω heißt *Häufungsstelle* der Zahlenfolge

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

wenn unendlich viele Zahlen der Folge (1) zwischen $\omega - \varepsilon$ und $\omega + \varepsilon$ liegen, wie klein die positive Größe ε auch angenommen wird.

Es ist sehr leicht unendliche Zahlenfolgen anzugeben, die keine Häufungsstelle besitzen können; diejenige aus den positiven ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

gebildete Zahlenfolge hat z. B. diese Eigenschaft. Andererseits gilt der Satz:

I. *Ist es möglich, zwei solche endliche Zahlen α_0 und β_0 zu bestimmen, daß für unzählige (speziell für jedes) n*

$$\alpha_0 > a_n > \beta_0 \tag{2}$$

ist, so hat die Zahlenfolge (1) *mindestens eine Häufungsstelle.*

Führen wir das aus α_0 und β_0 gebildete arithmetische Mittel m_1 ein, also $2m_1 = \alpha_0 + \beta_0$, so müssen unendlich viele Elemente der Folge (1) entweder zwischen α_0 und m_1 oder zwischen m_1 und β_0 liegen, oder auch haben die beiden dadurch bestimmten Grenzpaare α_0 und m_1, m_1 und β_0 diejenige Eigenschaft, daß unendlich viele Elemente von (1) zwischen ihnen gelegen sind.

Jedenfalls haben wir durch dies Verfahren zwei neue Zahlen α_1 und β_1 bestimmt, so daß $\alpha_1 > \beta_1$ ist, und daß zwischen α_1 und β_1 unendlich viele der Zahlen (1) liegen; weiter hat man

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \beta_1 \geqq \beta_0, \quad \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}.$$

Wir führen nunmehr das aus α_1 und β_1 gebildete arithmetische Mittel m_2 ein, also $2m_2 = \alpha_1 + \beta_1$, und bestimmen dadurch zwei neue Zahlen α_2 und β_2, so daß

$$\alpha_2 < \alpha_1, \quad \beta_2 > \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^2}$$

ist, während außerdem unendlich viele Zahlen der Folge (1) zwischen α_2 und β_2 liegen.

Durch unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man die Annäherungsreihen:

$$\begin{cases} \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \\ \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots \end{cases} \qquad \alpha_n - \beta_n = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^n}, \tag{3}$$

die so beschaffen sind, daß für jedes n unendlich viele Zahlen der Folge (1) zwischen α_n und β_n liegen.

Die Grenzzahl ω der Annäherungsreihen (3) ist daher eine Häufungsstelle der Zahlenfolge (1); wie aus unserem Beweisverfahren deutlich hervorgeht, kann die Folge (1) aber möglicherweise *mehrere* Häufungsstellen besitzen.

Beispiel 1. Die Zahlenfolge, deren Elemente durch die Ausdrücke

$$a_{2n} = 2 + \frac{1}{2n}, \qquad a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$$

definiert werden, hat die beiden Häufungsstellen 1 und 2 und keine anderen.

Wir bemerken ausdrücklich, daß die Häufungsstellen einer Zahlenfolge nicht notwendigerweise Elemente dieser Folge zu sein brauchen.

Beispiel 2. Die Zahlenfolge mit den irrationalen Elementen

$$a_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

hat die einzige Häufungsstelle 1, die ja rational ist.

Allgemein hat man den Satz:

II. *Eine Zahlenfolge, deren Elemente sämtlich zwischen zwei endlichen Zahlen liegen, und die eine und nur eine Häufungsstelle besitzt, ist eine Fundamentalreihe mit dieser Häufungsstelle als Grenzwert; umgekehrt kann eine Fundamentalreihe keine Häufungsstelle außer ihrem Grenzwerte besitzen.*

Hat die Zahlenfolge (1) nur die einzige Häufungstelle ω, so muß es möglich sein für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe ε eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geq N$ immer

$$\omega - \varepsilon < a_n < \omega + \varepsilon \tag{4}$$

ist; denn wäre dies nicht der Fall, so hätte unsere Zahlenfolge mindestens noch eine Häufungsstelle, die von ω verschieden ist.

Ist umgekehrt (1) eine Fundamentalreihe mit dem Grenwerte ω, so gelten die Ungleichungen (4) für $n \geq N$, und diese Zahlenfolge kann daher außer ω keine andere Häufungsstelle besitzen.

Sind sämtliche zwischen a und b gelegene Zahlen Häufungsstellen der Folge (1), so sagt man, daß diese Folge *überall dicht* zwischen a und b liegt.

Beispiel 3. Die aus sämtlichen zwischen 0 und 1 gelegenen *rationalen* Zahlen gebildete Folge, hat jede *beliebige* zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, 0 und 1 mitgerechnet, als Häufungsstelle; diese Folge liegt daher zwischen 0 und 1 überall dicht.

20. Man hat diejenige Zahlenfolge, deren Elemente für $n=0,1,2,3,\ldots$ durch die Ausdrücke

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad a_{2n+1} = n$$

bestimmt werden, zu untersuchen.

21. Man soll die Zahlenfolge, deren Eemente für $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ durch die Ausdrücke

$$a_{4n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1}, \ a_{4n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \ a_{4n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}, \ a_{4n+4} = n$$

bestimmt sind, untersuchen.

22. Es ist zu beweisen, daß diejenige Zahlenfolge, deren Elemente für positive ganze n aus den irreduziblen Brüchen von der Form

$$\frac{1^2}{n^2}, \ \frac{2^2}{n^2}, \ \frac{3^2}{n^2}, \ \ldots, \ \frac{(2n+1)^2}{n^2}$$

gebildet sind, zwischen 0 und 4 überall dicht liegt.

§ 13. Obere und untere Grenze.

Es ist sehr leicht Zahlenfolgen anzugeben, deren Elemente zwar sämtlich zwischen zwei endlichen und bestimmten Zahlen liegen, die aber dennoch weder ein größtes noch ein kleinstes Element besitzen. Diejenige aus den zwischen 0 und 1 gelegenen rationalen Zahlen gebildete Folge hat z. B. diese Eigenschaft.

Über solche Zahlenfolgen gilt aber der fundamentale Satz:

I. *Jede Zahlenfolge $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, deren Elemente sämtlich zwischen zwei endlichen Zahlen gelegen sind, hat sowohl eine obere Grenze G, als eine untere Grenze g; d. h. es existieren zwei endliche und bestimmte Zahlen G und g, die den beiden folgenden Bedingungen Genüge leisten:*

1. *Für jedes n hat man*

$$g \leqq a_n \leqq G. \tag{1}$$

2. *Es gibt mindestens einen Wert p von n, so daß*

$$a_p > G - \varepsilon \tag{2}$$

ist, und mindestens einen Wert q von n, so daß

$$a_q < g + \varepsilon \tag{3}$$

ist, indem ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe bezeichnet.

Um die Existenz der oberen Grenze G zu beweisen, bestimmen wir zwei endliche Zahlen α_0 und β_0, so daß α_0 größer ist als sämtliche Elemente unserer Folge, während einige dieser Elemente größer als β_0 sind. Führen wir nun das arithmetische Mittel m_1 zwischen

α_0 und β_0 ein, also $2m_1 = \alpha_0 + \beta_0$, so müssen jedenfalls einige Elemente unserer Folge entweder zwischen α_0 und m_1 oder zwischen m_1 und β_0 liegen; im ersten Falle setzen wir $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = m_1$, im zweiten Falle dagegen $\alpha_1 = m_1$, $\beta_1 = \beta_0$. Durch Einführung des arithmetischen Mittels m_2 zwischen α_1 und β_1, also $2m_2 = \alpha_1 + \beta_1$, bestimmen wir zwei neue Zahlen α_2 und β_2, so daß α_2 größer ist als sämtliche Elemente unserer Folge, während einige dieser Elemente größer als β_2 sind; weiter hat man

$$\alpha_2 \leq \alpha_1, \quad \beta_2 \geq \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^2}.$$

In dieser Weise kann man augenscheinlich unbegrenzt oft fortfahren, und dadurch erhält man die Annäherungsreihen

$$\begin{cases} \alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n, \ \ldots \\ \beta_0, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n, \ \ldots \end{cases} \qquad \alpha_n - \beta_n = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^n}, \tag{4}$$

so daß, für jedes n, α_n größer als sämtliche Elemente unserer Folge ist, während einige dieser Elemente größer als β_n sind. Die durch (4) definierte Grenzzahl G ist daher die obere Grenze unserer Zahlenfolge.

Wir haben bei dieser Entwicklung vorausgesetzt, daß keine der Zahlen α_n oder β_n für einen endlichen Wert des Stellenzeigers das größte Element unserer Folge war; ist dies der Fall, so liegt die Existenz von G auf der Hand.

In ganz ähnlicher Weise wird die Existenz der unteren Grenze g nachgewiesen.

Ist G bzw. g selbst ein Element der Zahlenfolge, so heißt diese Zahl *Maximalwert* bzw. *Minimalwert der Folge*.

Beispiel 1. Für die Zahlenfolge, deren Elemente für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ nach dem Gesetze

$$a_{nr+s} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{s}, \quad 1 \leq s < r \tag{5}$$

zu bilden sind, indem r eine bestimmte positive ganze Zahl bezeichnet, hat man $G = 2$, den Werten $n = 0$, $s = 1$ entsprechend, und $g = 1 : r$ den Werten $n = \infty$, $s = r$ entsprechend. G ist daher der Maximalwert unserer Folge, welche aber keinen Minimalwert besitzt.

Beispiel 2. Für diejenige aus den Elementen (5) gebildete Zahlenfolge $2 - a_1, \ 2 - a_2, \ 2 - a_3, \ldots$ hat man $G = 2 - \frac{1}{r}$, den Werten $n = \infty$, $s = r$ entsprechend und $g = 0$, den Werten $n = 0$, $s = 1$ entsprechend; g ist der Minimalwert dieser Folge, welche aber keinen Maximalwert hat.

Ist G bzw. g selbst ein Element der Zahlenfolge, so kann es, wie es deutlich aus den Beispielen 1 und 2 hervorgeht, eintreffen, daß die Bedingung (2) bzw. (3) nur von G bzw. g selbst, sonst aber von keinem anderen Element der Folge befriedigt wird.

Als Ergänzung dieser Bemerkung beweisen wir den folgenden Satz:

II. *Ist die obere bzw. untere Grenze einer Folge kein Element dieser Folge, so ist G bzw. g eine Häufungsstelle dieser Zahlenfolge.*

Ist G nicht Element der Zahlenfolge, so liegen zwischen G und $G - \varepsilon$, wie klein auch die positive Größe ε angenommen wird, unendlich viele Elemente der Folge; denn hätte nur eine endliche Zahl von Elementen diese Eigenschaft, so wäre das größte dieser Elemente die obere Grenze der Folge, was unzulässig ist.

In ganz derselben Weise behandelt man den anderen Fall, wo g kein Element der Folge ist.

Beispiel 3. Für die in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Zahlenfolgen ist g bezw. G Häufungsstelle der Folge.

Wenn wir in unserer folgenden Darstellung die Redensart *eine positive von Null verschiedene Zahl* benutzen, so meinen wir damit, daß die von diesen Zahlenwerten gebildete Folge nicht die untere Grenze Null hat.

Ist es nicht möglich eine solche Zahl so anzugeben, daß sie größer bzw. kleiner als sämtliche Elemente der Folge ist, so sagen wir, daß diese Folge die obere Grenze $+\infty$ bzw. untere Grenze $-\infty$ hat.

Beispiel 4. Die aus den rationalen Zahlen kleiner als 1 gebildete Folge hat $G = 1$, $g = -\infty$.

Beispiel 5. Die aus den rationalen Zahlen größer als -1 gebildete Zahlenfolge hat $G = +\infty$, $g = -1$.

Den Begriff obere und untere Grenze sowie den Satz I verdankt man Bolzano[1]); aber zuerst durch die Vorlesungen von Weierstraß ist die fundamentale Bedeutung dieser Begriffe klar hervorgegangen.

---

23. Man soll die obere und untere Grenze derjenigen in den Aufgaben zum § 12 definierten Zahlenfolgen bestimmen.

24. Für die aus dem Ausdrucke

$$a_{n,p} = s_n + \frac{1}{n+p}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

---

1) 1817. Vgl. Stolz in Mathem. Annalen. Bd. 18, p. 257. 1881.

nach der im § 2, Beispiel 3 gegebenen Regel gebildete Zahlenfolge sind die obere und untere Grenze zu bestimmen, indem allgemein

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

gesetzt worden ist.

§ 14. Limes superior und limes inferior.

Über die Häufungsstellen einer Zahlenfolge beweisen wir nunmehr den Satz:

I. *Jede unendliche Zahlenfolge, deren Elemente sämtlich zwischen zwei endlichen und bestimmten Zahlen liegen, hat immer sowohl eine größte als eine kleinste Häufungsstelle.*

Da die Häufungsstellen sämtlich zwischen zwei endlichen und bestimmten Zahlen liegen müssen, so beweist man ganz wie im vorhergehenden Paragraphen die Existenz zweier endlicher und bestimmter Zahlen L und l, so daß keine Häufungsstelle größer als L und kleiner als l sein kann, während mindestens eine Häufungsstelle ω den Bedingungen $L \geq \omega \geq L - \varepsilon$ und eine Häufungsstelle ω' den entsprechenden Bedingungen $l \leq \omega' \leq l + \varepsilon$ genügt, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen wird.

Nun liegen aber zwischen $\omega + \delta$ und $\omega - \delta$ und ebenso zwischen $\omega' + \delta$ und $\omega' - \delta$ unendlich viele Elemente unserer Zahlenfolge, wie klein auch die positive Zahl δ angenommen wird; es liegen daher auch unendlich viele Elemente unserer Zahlenfolge sowohl zwischen $L + \delta$ und $L - \delta - \varepsilon$ als zwischen $l + \delta + \varepsilon$ und $l - \delta$; d. h. die beiden Zahlen L und l sind Häufungsstellen unserer Zahlenfolge.

Andererseits kann die Zahlenfolge aber nicht unendlich viele Elemente enthalten, die entweder größer als $L + \delta$ oder kleiner als $l - \delta$ sind, wie klein auch die positive Größe δ angegeben wird; denn dann hätte man eine Häufungsstelle größer als L oder kleiner als l, was ja, der Definition von L und l zufolge, unmöglich ist.

Die so bestimmte kleinste und größte Häufungsstelle L oder l einer Zahlenfolge nennen wir *limes superior* (lim. sup.) bzw. *limes inferior* (lim. inf.) dieser Zahlenfolge und der Satz I kann daher auch folgendermaßen formuliert werden:

II. *Die unendliche Zahlenfolge*

$$(1) \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

deren Elemente sämtlich zwischen zwei endlichen und bestimmten Zahlen gelegen sind, hat sowohl einen limes superior L als auch einen limes inferior l; d. h. es existieren zwei solche Zahlen L und l, die den folgenden zwei Bedingungen genügen:

1. *Bedeutet σ eine vorgegebene positive willkürlich kleine Größe, so ist es möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer*

$$a_n < L + \sigma, \quad a_n > l - \sigma \tag{2}$$

ist.

2. *Die Ungleichungen*

$$a_n > L - \sigma, \quad a_n < l + \sigma \tag{3}$$

sind aber für unendlich viele Werte von n richtig, wie klein die positive Größe σ auch gewählt wird.

Beispiel 1. Für die in § 13, Beispiel 1 betrachtete Zahlenfolge hat man

$$\lim_{n=\infty} \text{sup. } a_n = 1, \quad \lim_{n=\infty} \text{inf. } a_n = \frac{1}{r}.$$

Beispiel 2. Für die in § 13, Beispiel 2 definierte Zahlenfolge findet man

$$\lim_{n=\infty} \text{sup. } a_n = 2 - \frac{1}{r}, \quad \lim_{n=\infty} \text{inf. } a_n = 0.$$

Kombiniert man II und § 13, II, so erhält man den Satz:

III. *Hat eine Zahlenfolge, deren Elemente sämtlich zwischen zwei endlichen und bestimmten Zahlen liegen, keinen Maximalwert bzw. keinen Minimalwert, so sind lim. sup. und obere Grenze bzw. lim. inf. und untere Grenze dieser Zahlenfolge identisch.*

Ist die Zahlenfolge (1) nicht konvergent, so ist es möglich, aus ihren Elementen solche auszunehmen, die Fundamentalreihen mit den Häufungsstellen der Zahlenfolge als Grenzwerte bilden; es ist also möglich, solche Stellenzeiger

$$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_m, \cdots$$

zu bestimmen, daß

$$\lim_{m=\infty} a_{p_m}$$

endlich und bestimmt wird; man hat dann immer

$$l \leqq \lim_{m=\infty} a_{p_m} \leqq L. \tag{4}$$

Hat man $L > l$, so heißt die Differenz $L - l$ das *Oszillations-* oder *Unbestimmtheitsintervall* der Zahlenfolge.

Beispiel 3. Für die aus sämtlichen rationalen Zahlen gebildete Zahlenfolge hat man $L = +\infty$, $l = -\infty$; das Oszillationsintervall dieser Folge ist daher unendlich groß.

Ist andererseits $l = L$, so ist die Zahlenfolge (1) eine Fundamentalreihe mit dieser Zahl L als Grenzwert.

Die Begriffe lim. sup. und lim. inf. sind zuerst von Cauchy[1]) (la plus grande des limites) und von Abel[2]) (la plus petite des limites) eingeführt worden; aber zuerst durch die Arbeiten von P. du Bois Reymond[3]) ist die funtamentale Bedeutung dieser Begriffe deutlich hervorgegangen.

25. Man soll lim. sup. und lim. inf. für die in den Aufgaben zum § 13 betrachteten Zahlenfolgen bestimmen.

26. Es sind obere und untere Grenze sowie lim. sup. und lim. inf. für die Zahlenfolgen, deren Elemente für positive ganze n durch die Ausdrücke

$$a_n = 1 + (-1)^n - \frac{1}{n}, \quad b_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$$

und durch ihre reziproken Werte definiert sind, zu bestimmen.

§ 15. Hilfssatz von Abel.

In seiner berühmten Abhandlung über die Binomialformel hat Abel[4]) den folgenden Hilfssatz bewiesen.

I. *Ist die Folge mit lauter positiven Elementen*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n, \cdots \cdots \tag{1}$$

monoton abnehmend, und bildet man aus der Folge

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \cdots \tag{2}$$

eine neue Zahlenfolge

$$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots \cdots, \tag{3}$$

indem man allgemein

$$s_p = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p; \quad a_p = s_p - s_{p-1} \tag{4}$$

setzt, so hat man für jedes n

$$\varepsilon_1 \cdot g_n \leqq a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n \leqq \varepsilon_1 \cdot G_n, \tag{5}$$

wo G_n und g_n obere und untere Grenze der Folge $s_1, s_2, \cdots, s_n$ bezeichnen.

1) Analyse algébrique, p.p. 132, 156; 1821.

2) Œuvres Bd. II, p. 198.

3) Man vgl. z. B. Antrittsprogramm der Univ. Tübingen p. 3. Abhandlungen der Münchener Akademie Bd. 12, p. 125; 1876. Allgemeine Funktionentheorie Bd. I, p. 266; 1881.

4) Journal für Mathematik Bd. 1, p. 314; 1826. Œuvres Bd. I, p. 222.

Setzt man der Kürze halber

$$A_n = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \cdots + a_n\,\varepsilon_n, \tag{6}$$

so erhält man wegen der letzten Formel (4)

$$A_n = \varepsilon_1\,s_1 + \varepsilon_2\,(s_2 - s_1) + \varepsilon_3\,(s_3 - s_2) + \cdots + \varepsilon_n\,(s_n - s_{n-1}),$$

woraus nach einer einfachen Umformung hervorgeht:

$$A_n = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,s_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\,s_{n-1} + \varepsilon_n\,s_n. \tag{7}$$

Nun hat man aber $\varepsilon_n > 0$ und, für jedes r, $\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r \geqq 0$; die Ungleichungen (5) leiten sich daher unmittelbar aus (7) ab, wenn man anstatt jeder einzelnen der Summen s_p teils G_n teils g_n einführt und die Identität

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + \varepsilon_n = \varepsilon_1$$

benutzt.

Aus (7) findet man in derselben Weise den ähnlichen Satz:

II. *Ist die Zahlenfolge* (1) *monoton wachsend, so findet man mit denselben Bezeichnungen wie vorher für jedes n die Ungleichungen*

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)\,G_n + \varepsilon_n\,g_n \leqq A_n \leqq (\varepsilon_1 - \varepsilon_n)\,g_n + \varepsilon_n\,G_n. \tag{8}$$

In diesem Falle hat man ja in der Tat $\varepsilon_n > 0$ aber für jedes r $\varepsilon_r - \varepsilon_{r-1} \geqq 0$.

Wir haben später in § 39 diese Abelsche Methode erheblich zu verallgemeinern.

---

27. Es ist der Abelsche Satz auf die Summe

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p}{p+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2}}{p+3} - \cdots$$

anzuwenden.

28. Man soll für $p = \infty$ den Grenzwert der Summe

$$\frac{p+1}{2^p} - \frac{p+2}{2^{p+1}} + \frac{p+3}{2^{p+2}} - \frac{p+4}{2^{p+3}} + \cdots$$

bestimmen.

Kapitel IV.

Komplexe Zahlenfolgen.

§ 16. Rechnenoperationen mit Zahlenpaaren.

Wir haben nunmehr unseren Zahlenbegriff auf Zahlenpaare[1]) von der Form (a, b), wo a und b gewöhnliche Grenzzahlen bezeichnen,

1) Ganz wie die reelle Zahl a als der Punkt der Abszissenachse mit der Abszisse a abgebildet werden kann, so bildet man das Zahlenpaar (a, b) als den Punkt der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten a und b geometrisch ab. Man vergleiche übrigens § 25.

zu erweitern. Zu diesem Zwecke haben wir vor allem durch Definition die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Zahlenpaare festzustellen.

1. *Die Zahlenpaare* (a, b) *und* (a_1, b_1) *sind dann und nur dann einander gleich oder identisch, wenn* $a = a_1$ *und* $b = b_1$ *ist.*

Benutzt man das gewöhnliche Gleichheitszeichen, so hat man daher

$$(a, b) = (a_1, b_1) \tag{1}$$

dann und nur dann, wenn

$$a = a_1, \quad b = b_1 \tag{2}$$

und umgekehrt.

Benutzen wir auch hier das gewöhnliche Ungleichheitszeichen $\neq$, setzen wir also $(a, b) \neq (a_1, b_1)$, wenn nicht die *beiden* Gleichungen (2) stattfinden.

Aus diesen Definitionen schließt man unmittelbar, daß zwei Zahlenpaare, die beide einem dritten gleich sind, auch einander gleich sein müssen.

Durch Definition setzen wir noch für das Zahlenpaar (a, b) die neue Eigenschaft fest:

2. *Das Zahlenpaar* (a, b) *ist reell und gleich* a, *wenn* $b = 0$ *vorausgesetzt wird, also*

$$(a, 0) = a. \tag{3}$$

Hieraus schließt man ohne weiteres, daß derjenige durch die Zahlenpaare (a, b) gebildete Zahlenbegriff einen und nur einen Nullwert, nämlich die reelle Null

$$(0, 0) = 0 \tag{4}$$

besitzen kann.

Die beiden Zahlenpaare (a, b) und $(a, -b)$ heißen *konjugiert.*

Man nennt das Zahlenpaar $\omega = (a, b)$ *unendlich groß,* wenn entweder $a = \pm\infty$ oder $a = \pm\infty$ oder $a = \pm\infty$ und gleichzeitig $b = \pm\infty$ ist; benutzt man auch hier das gewöhnliche Zeichen ∞, so hat man demnach $\omega = \infty$ in den folgenden drei Fällen

$$\omega = (\pm\infty, b), \quad \omega = (a, \pm\infty), \quad \omega = (\pm\infty, \pm\infty) \tag{5}$$

und sonst nicht.

Was nun Rechnenoperationen mit Zahlenpaaren betrifft, so sollen dieselben in solcher Weise definiert werden, daß diese Operationen in die gewöhnlichen Rechnenoperationen mit reellen Zahlen übergehen, wenn die dort vorkommenden Zahlenpaare, der Definition (3) wegen, in reelle Zahlen übergehen. Behalten wir die gewöhnlichen

Operationszeichen bei, so sind diese Forderungen durch die folgenden Definitionen erfüllt:

3. *Die Summe der Zahlenpaare* $\omega = (a, b)$ *und* $\omega' = (c, d)$ *ist dasjenige durch die Gleichung*

$$\omega + \omega' = (a + c, b + d) \tag{6}$$

definierte Zahlenpaar.

Aus dieser Definition erhält man unmittelbar den Satz:

I. *Die beiden aus der Addition reeller Zahlen bekannten Grundprinzipe gelten auch für die Addition von Zahlenpaaren, nämlich* 1. *das kommutative Prinzip:*

$$\omega + \omega' = \omega' + \omega \tag{7}$$

2. *das assoziative Prinzip:*

$$(\omega + \omega') + \omega'' = \omega + (\omega' + \omega'') = \omega + \omega' + \omega''. \tag{8}$$

Weiter findet man aus (6) die beiden anderen Sätze:

II. *Jedes Zahlenpaar* $\omega = (a, b)$ *kann stets als die Summe zweier anderer, von welchen das erste die reelle Zahl a ist, dargestellt werden:*

$$\omega = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, b). \tag{9}$$

III. *Sind* $\omega = (a, b)$ *und* $\omega' = (c, d)$ *zwei willkürliche endliche Zahlenpaare, so hat die Gleichung*

$$\omega + x = \omega' \text{ oder } x + \omega = \omega' \tag{10}$$

in x eine und nur eine Lösung, die man die Differenz zwischen ω' *und* ω *nennt und als*

$$x = \omega' - \omega \tag{11}$$

bezeichnet.

Setzt man nämlich $x = (\alpha, \beta)$, so hat man wegen (6) und (10) $a + \alpha = c$, $b + \beta = d$, woraus folgt:

$$\omega' - \omega = (c - a, d - b); \tag{12}$$

ist in (10) $\omega = \omega'$, so erhält man $x = 0$; ist $\omega' = 0$, so setzt man $x = -\omega$; es ist demnach

$$-(a, b) = (-a, -b). \tag{13}$$

4. *Das Produkt von* $\omega = (a, b)$ *und* $\omega' = (c, d)$ *ist dasjenige durch die Gleichung*

$$\omega\omega' = (ac - bd, ad + bc) \tag{14}$$

bestimmte Zahlenpaar.

Aus dieser Definition erhält man unmittelbar die Sätze:

IV. *Die aus der Multiplikation reeller Zahlen bekannten Grundprinzipe gelten ungeändert für die Multiplikation von Zahlenpaaren, nämlich* 1. *das kommutative Prinzip*:

$$\omega\omega' = \omega'\omega, \tag{15}$$

2. *das assoziative Prinzip:*

$$(\omega\omega')\,\omega'' = \omega\,(\omega'\omega'') = \omega\omega'\omega'', \tag{16}$$

3. *das distributive Prinzip*:

$$\omega\,(\omega' + \omega'') = \omega\omega' + \omega\omega''. \tag{17}$$

Aus (14) findet man unmittelbar die Gleichheit (15); ist weiter $\omega'' = (p, q)$, so hat man

$$(\omega\omega')\,\omega'' = (ac - bd,\ ad + bc)\cdot(p, q),$$

woraus nach einer einfachen Ausrechnung hervorgeht:

$$(\omega\omega')\,\omega'' = (a, b)\cdot(cp - dq,\ cq + dp);$$

aus $\omega' + \omega'' = (c + p, d + q)$ erhält man endlich unmittelbar die Formel (17).

V. *Sind* $\omega = (a, b)$ *und* $\omega' = (c, d)$ *zwei willkürliche endliche Zahlenpaare, so hat die Gleichung*

$$\omega x = \omega' \text{ oder } x\omega = \omega' \tag{18}$$

für $\omega \neq 0$ *eine und nur eine Lösung in* x; *ist* $\omega = 0$ *aber* $\omega' \neq 0$, *so hat man* $x = \infty$.

Setzt man in der Tat $x = (\alpha, \beta)$, so erhält man wegen (14)

$$c = a\alpha - b\beta,\ d = a\beta + b\alpha,$$

woraus ohne Mühe hervorgeht:

$$\alpha = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2},\ \beta = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}. \tag{19}$$

Das so bestimmte Zahlenpaar x stellt den Quotienten zwischen ω' und ω dar und wird als

$$x = \omega' : \omega = \frac{\omega'}{\omega}$$

bezeichnet; man hat demnach

$$\frac{(c, d)}{(a, b)} = \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2},\ \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\right); \tag{20}$$

ist speziell $\omega = \omega'$, so findet man $x = 1$.

Aus der Multiplikationsregel (14) erhält man noch den Satz:

VI. *Das Quadrat des Zahlenpaares* $(0, b)$ *ist negativ reell und gleich* $-b^2$.

Dadurch erhalten wir weiter

VII. *Die Gleichung*

(21) $$x^2 = -1 = (-1, 0),\ x^2 = x \cdot x,$$

hat zwei und nur zwei Wurzeln, nämlich $x = (0, \pm 1)$.

Setzt man in der Tat $x = (\alpha, \beta)$, so ist auch $x^2 = (\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta)$, und demnach erhält man $\alpha^2 - \beta^2 = -1$, $2\alpha\beta = 0$. Aus der letzten dieser Gleichungen ergibt sich demnach entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$; die letzte dieser Lösungen ist indessen unbrauchbar; denn das Quadrat der reellen Zahl $(\alpha, 0) = \alpha$ ist immer positiv; es ist daher $\alpha = 0$ und demnach $\beta = \pm 1$.

Aus (14) erhalten wir endlich:

VIII. *Das Produkt zweier endlichen Zahlenpaare ist dann und nur dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist.*

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Nullwerden des Produkts $(a, b) \cdot (c, d)$ ist nämlich

(22) $$ad + bc = 0,\ ac - bd = 0;$$

ist nun $(a, b) \neq 0$ also $a^2 + b^2 \neq 0$, so findet man aus (22) $c = 0$ und $d = 0$, woraus $(c, d) = 0$ folgt.

---

29. Durch das Zahlenpaar (a, b) definiert man einen Zahlenbegriff, indem man die beiden Definitionen § 16, 1 und 3 beibehält, während 2 und 4 durch die folgenden $(a, a) = a$ und $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ ersetzt werden. Es ist zu beweisen, daß die gewöhnlichen Grundprinzipe der Rechnenoperationen auch für diesen Zahlenbegriff gelten, daß aber ein Produkt Null werden kann, ohne daß mindestens einer der Faktoren verschwindet. Gestattet dieser Zahlenbegriff eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$?
30. Man soll denjenigen Zahlenbegriff untersuchen, der aus dem Zahlenpaare (a, b) gebildet wird, wenn man die Definitionen der vorhergehenden Aufgabe aufrecht hält, nur verlangt, daß die Multiplikation durch die Gleichung $(a, b) \cdot (c, d) = (ad, bc)$ definiert wird.
31. Für Zahlenpaare, die die Bedingungen § 16, 1, 2 und 3 befriedigen, soll man die Multiplikationsregel $(a, b)(c, d) = (u, v)$, wo der Kürze halber

$$u = \alpha ac + \beta ad + \gamma bc + \delta bd,\ v = \alpha_1 ac + \beta_1 ad + \gamma_1 bc + \delta_1 bd$$

gesetzt worden sind, in solcher Weise bestimmen, daß die Bedingungen

$$(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b);\ (a,0)^2 = a^2;\ (a,0)(0,b) = (0,ab);\ (0,b)^2 = -b^2$$

erfüllt werden.

32. Man soll die Multiplikationsregel der vorhergehenden Aufgabe in solcher Weise bestimmen, daß die Multiplikation kommutativ, assoziativ und distributiv wird, und daß außerdem ein Produkt zweier endlichen Faktoren nur verschwinden kann, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.

§ 17. Absoluter Betrag und Charakteristik komplexer Zahlen.

Die in § 16 eingeführten Zahlen werden gewöhnlich *komplex* genannt; man pflegt in diesen Zahlenbegriff die Bezeichnung

$$(1) \qquad (0, 1) = i,\ (0, -1) = -i;\ (\pm i)^2 = -1$$

einzuführen, und die Multiplikationsregel ergibt dann ohne weiteres

$$(2) \qquad (0, \pm b) = \pm ib,$$

woraus unter Anwendung von § 16, (9)

$$(3) \qquad (a, \pm b) = a \pm ib,$$

folgt, während die Definitionen der Rechnenoperationen sich nun folgendermaßen darstellen lassen:

$$(4) \qquad (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

$$(5) \qquad (a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)$$

$$(6) \qquad (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

$$(7) \qquad \frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd - i(ad - bc)}{c^2 + d^2}.$$

Aus (4) und (6) erhält man unmittelbar den Satz:

I. *Die Summe der zwei konjugierten Zahlen* $a \pm ib$ *ist reell und gleich* $2a$, *während das Produkt dieser beiden Zahlen positiv und gleich* $a^2 + b^2$ *ist.*

Bei der komplexen Zahl $x = a + ib$ nennt man a und b die reelle bzw. die imaginäre Komponente der Zahl x, und man setzt gewöhnlich

$$(8) \qquad a = \Re(x),\ b = \Im(x) = -\Re(ix).$$

Wir haben nunmehr den absoluten Betrag $|x|$ der komplexen Zahl $x = a + ib$ zu definieren, und dies soll in solcher Weise geschehen, daß wir dadurch für $b = 0$ den gewöhnlichen absoluten Betrag $|a|$ der reellen Zahl a finden; wir setzen daher

$$(9) \qquad |x| = +\sqrt{a^2 + b^2};$$

denn dadurch erhalten wir, für $b = 0$, $|x| = |a| = +\sqrt{a^2}$.

Mit dieser Definition des absoluten Betrages gelten die in § 1 entwickelten Formeln ungeändert allgemein, man hat in der Tat die beiden Sätze:

II. *Der absolute Betrag der Summe zweier komplexen Zahlen* $x = a + ib$ *und* $y = c + id$ *kann niemals größer als* $|x| + |y|$ *und niemals kleiner als* $\big||x| - |y|\big|$ *sein.*

Aus (9) erhält man ohne weiteres

$$(|x| \pm |y|)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)};$$

weiter hat man wegen (4) und (9)

$$|x + y|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd);$$

nun ist aber immer

$$|ac + bd| \leqq +\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)};$$

denn durch Quadrierung erhält man

$$2|abcd| \leqq a^2d^2 + b^2c^2,$$

und dies ist offenbar richtig, weil $(ad \pm bc)^2 \geqq 0$ sein muß; damit sind aber die beiden fundamentalen Ungleichungen

$$|x| - |y| \leqq |x + y| \leqq |x| + |y| \tag{10}$$

bewiesen.

III. *Der absolute Betrag eines Produkts ist dem Produkte der absoluten Beträge der einzelnen Faktoren gleich:*

$$|xy| = |x| \cdot |y|. \tag{11}$$

Die Multiplikationsregel (6) ergibt in der Tat unmittelbar (11), wenn man die offenbare Identität

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \tag{12}$$

anwendet.

Setzt man für n positiv ganz, x willkürlich komplex

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \text{ (n Faktoren)},$$

so erhält man wegen (11)

$$|x^n| = |x|^n. \tag{13}$$

Ist r der absolute Betrag der komplexen Zahl $x = a + ib$, so ergibt sich wegen (6):

$$x = a + ib = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right); \tag{14}$$

der zu r gehörige Faktor wird die *Charakteristik* der komplexen Zahl x genannt; eine Charakteristik hat daher immer den absoluten Betrag 1.

Aus (14) ersieht man, daß die Gleichheit bei der höheren Grenze in (10) dann und nur dann anwendbar ist, wenn die Addenden x und y dieselbe Charakteristik haben, während die Gleichheit bei der unteren Grenze dann und nur dann anwendbar sein kann, wenn die

Charakteristiken der beiden Addenden einander gleich mit entgegengesetztem Zeichen sind.

---

33. Man hat die Formel

$$\sqrt{a \pm ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

zu beweisen und die Zeichen rechter Hand zu diskutieren.

34. Es ist zu beweisen, daß zwei konjugierte komplexe Zahlen immer Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind. Wie heißt der umgekehrte Satz und wie wird derselbe bewiesen?

35. Unter Anwendung der Formel § 17, (12) soll man beweisen, daß das Produkt einer willkürlichen Zahl von Faktoren von der Form $a^2 + b^2c$, wo a^2 und b^2 Quadratzahlen sind, während c stets denselben Wert hat, immer eine Zahl derselben Form wird. Beispiele $c = 1$, $c = -1$.

§ 18. Zahlenfolgen mit komplexen Elementen.

Für die Zahlenfolge mit komplexen Elementen

$$(1) \qquad a_0 + ib_0,\ a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2,\ \cdots,\ a_n + ib_n,\ \cdots$$

werden dieselben Bezeichnungen konvergent, divergent und oszillierend, mit derselben Bedeutung wie bei Zahlenfolgen mit reellen Elementen angewendet.

Die Zahlenfolge (1) ist demnach *konvergent*, wenn der Grenzwert

$$(2) \qquad A = \lim_{n=\infty} (a_n + ib_n)$$

endlich und bestimmt ist, *divergent*, wenn $|a_n + ib_n|$ mit n über jede Grenze hinaus wächst, und *oszillierend*, wenn sie weder konvergiert noch divergiert.

Die Gleichung (2) hat natürlich dieselbe Bedeutung wie bei Zahlenfolgen mit reellen Elementen; d. h. bezeichnet ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe, so soll es möglich sein eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$(3) \qquad |A - (a_n + ib_n)| < \varepsilon$$

wird.

Beispiel 1. Die Zahlenfolge $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$ ist für $|x| < 1$ konvergent mit dem Grenzwerte 0, für $|x| > 1$ aber divergent.

Beispiel 2. Die geometrische Reihe $a + aq + aq^2 + \cdots$ ist für $|q| < 1$ konvergent mit der Summe $a:(1-q)$, für $|q| > 1$ aber divergent.

Während der Grenzwert einer reellen Zahlenfolge immer reell sein muß, so braucht der Grenzwert einer komplexen Zahlenfolge nicht selbst komplex zu sein.

Beispiel 3. Die Zahlenfolge mit komplexen Elementen

$$1 + \frac{i}{1},\ 1 + \frac{i}{2},\ 1 + \frac{i}{3}, \cdots, 1 + \frac{i}{n}, \cdots$$

hat den reellen Grenzwert 1.

Über konvergente Zahlenfolgen oder Fundamentalreihen mit komplexen Elementen gilt der Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Zahlenfolge* (1) *mit komplexen Elementen besteht darin, daß die Zahlenfolgen mit reellen Elementen*

$$\left.\begin{array}{l} a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots, a_n, \cdots \\ b_0,\ b_1,\ b_2, \cdots, b_n, \cdots \end{array}\right\} \tag{4}$$

beide konvergieren; hat man

$$\lim_{n=\infty} a_n = A, \quad \lim_{n=\infty} b_n = B, \tag{5}$$

so ist auch

$$\lim_{n=\infty} (a_n + ib_n) = A + iB. \tag{6}$$

Ist die Zahlenfolge (1) konvergent, mit dem Grenzwerte $A + iB$, so hat man wegen (3) für $n \geqq N$ immer

$$|A + iB - (a_n + ib_n)| < \varepsilon; \tag{7}$$

da nun keiner der absoluten Beträge $|A - a_n|$ und $|B - b_n|$ größer als

$$|A + iB - (a_n + ib_n)| = +\sqrt{(A - a_n)^2 + (B - b_n)^2}$$

sein kann, so erhält man aus (7) für $n \geqq N$ immer

$$|A - a_n| < \varepsilon, \qquad |B - b_n| < \varepsilon; \tag{8}$$

d. h. die beiden Zahlenfolgen (4) konvergieren mit den Grenzwerten A und B.

Sind umgekehrt die Zahlenfolgen (4) mit den Grenzwerten A und B konvergent, so erhält man wegen (8) für $n \geqq N$ immer

$$|A + iB - (a_n + ib_n)| \leqq |A - a_n| + |B - b_n| < 2\varepsilon;$$

d. h. die Zahlenfolge (1) ist konvergent und hat den Grenzwert $A + iB$.

Aus I folgert man unmittelbar, daß das für reelle Zahlenfolgen bewiesene allgemeine Konvergenzprinzip ungeändert für Fundamentalreihen mit komplexen Elementen gilt; also:

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Zahlenfolge* (1) *mit willkürlichen komplexen Elementen besteht darin, daß es für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe* ε *möglich ist eine solche positive ganze Zahl* N *zu bestimmen, daß für* $n \geqq N$ *immer*

$$|a_{n+p} + ib_{n+p} - (a_n + ib_n)| < \varepsilon \tag{9}$$

wird, indem p *eine willkürliche positive ganze Zahl bedeutet.*

---

36. Man soll die Zahlenfolge, deren Elemente für $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ aus den Ausdrücken

$$a_{nr+s} = \frac{1}{n+1} + \frac{i^s}{r}, \quad 1 \leqq s \leqq r$$

gebildet werden, untersuchen; r bedeutet eine bestimmte positive ganze Zahl.

37. Man soll die in § 15 bewiesenen Sätze dahin verallgemeinern, daß die Zahlenfolge

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

komplex ist.

§ 19. Sätze von Cauchy und Jensen.

Über Zahlenfolgen mit willkürlichen Elementen hat Jensen[1]) den folgenden fundamentalen Satz als Verallgemeinerung eines Grenzsatzes von Cauchy gegeben:

I. *Wenn die Zahlenfolge*

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

die beiden Bedingungen:

(1) $$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

und für jedes n

(2) $$|a_1| + |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| < B.|a_n|,$$

wo B *eine feste bestimmte von* n *unabhängige Zahl bezeichnet, befriedigt, wenn außerdem die Fundamentalreihe*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

---

1) Tidsskrift for Mathematik (5) Bd. 2, p. 81—84, 1884. Comptes rendus Bd. 106. p. 833—836; 1888.

den Grenzwert Φ hat, also wenn

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \varphi_n \tag{3}$$

endlich und bestimmt ist, so hat man immer den anderen Grenzwert:

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_1\varphi_1 + (a_2 - a_1)\varphi_2 + \cdots (a_n - a_{n-1})\varphi_n}{a_n} \right). \tag{4}$$

Setzt man der Kürze halber

$$\varphi_p = \Phi - \varrho_p, \quad \lim_{n=\infty} \varrho_n = 0,$$

so zeigt die offenbare Identität

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}), \tag{5}$$

daß (4) mit dieser andern Formel

$$0 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_1\varrho_1 + (a_2 - a_1)\varrho_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})\varrho_n}{a_n} \right) \tag{6}$$

identisch wird, so daß uns nur übrig bleibt, die Richtigkeit dieser letzten Formel nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke setzen wir der Kürze halber

$$|a_1| + |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| = A_n \tag{7}$$

und erhalten somit wegen (2) für jedes n

$$|a_n| \leqq A_n < B \cdot |a_n|, \quad \frac{1}{|a_n|} < \frac{B}{A_n}; \tag{8}$$

die Zahlenfolge

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

ist somit monoton wachsend und divergent. Für jedes vorgegebene hinlänglich große n muß es daher möglich sein eine entsprechende positive ganze Zahl m zu bestimmen, so daß

$$A_{m+1}^2 > A_n \geqq A_m^2 \tag{9}$$

sein muß; man hat daher wohl $n > m$, aber m muß jedoch mit n über jede Grenze hinauswachsen.

Da nun wegen (7) $A_{p+1} - A_p = |a_{p+1} - a_p|$ ist, so hat man für den absoluten Betrag

$$M_n = \left| \frac{a_1\varrho_1 + (a_2 - a_1)\varrho_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})\varrho_n}{a_n} \right|$$

die höhere Grenze

$$M_n \leqq \frac{|\varrho_1| A_1 + |\varrho_2| (A_2 - A_1) + \cdots + |\varrho_n| (A_n - A_{n-1})}{a_n},$$

woraus wegen (8) folgt:

$$M_n < \frac{B}{A_n} \left(|\varrho_1| A_2 + |\varrho_2| (A_2 - A_1) + \cdots + |\varrho_n| (A_n - A_{n-1}) \right). \tag{10}$$

Es sei nun ϱ_n' die obere Grenze der positiven Zahlen

$$|\varrho_1|, |\varrho_2|, \cdots |\varrho_m|$$

und ϱ_n'' die obere Grenze der weiteren positiven Zahlen

$$|\varrho_{m+1}|, |\varrho_{m+2}|, \cdots, |\varrho_n|;$$

dann ergibt sich wegen (10)

$$M_n \leq B \cdot \left(\frac{A_m}{A_n} \cdot \varrho_n' + \frac{A_n - A_m}{A_n} \cdot \varrho'' \right);$$

weiter hat man $A_n \geqq A_m^2$, $A_n > A_n - A_m$, und somit erhält man

$$M_n < B \left(\frac{\varrho_n'}{A_m} + \varrho_n'' \right);$$

da nun der Definition der Zahlen ϱ_n' und ϱ_n'' wegen

$$\lim_{m=\infty} \frac{\varrho_n'}{A_m} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varrho_n'' = 0$$

ist, so ist (6) und damit auch (4) bewiesen.

Die große Allgemeinheit des Satzes I liegt auf der Hand; er ist z. B. anwendbar, falls die Zahlenfolge

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

mit positiven Elementen monoton wachsend und divergent ist.

Setzt man

$$(a_n - a_{n-1})\varphi_n = b_n - b_{n-1}, \quad a_1 \varphi_1 = b_1,$$

so ergibt sich

$$a_1\varphi_1 + (a_2 - a_1)\varphi_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})\varphi_n = b_n,$$

woraus die Formel

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} \right) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{b_n}{a_n} \right), \tag{11}$$

falls der Grenzwert linker Hand endlich und bestimmt ist, hergeleitet werden kann.

Aus (11) findet man für $a_n = n$ den Satz von Cauchy[1]):

II. *Hat die Zahlenfolge* $b_1, b_2, b_3, \cdots b_n, \cdots$ *die Eigenschaft, daß*

$$\lim_{n=\infty} (b_n - b_{n-1}) \tag{12}$$

endlich und bestimmt ist, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot b_n \right) = \lim_{n=\infty} (b_n - b_{n-1}). \tag{13}$$

1) Analyse algébrique, p. 54; 1821.

Stolz[1]) hat einen andern Spezialfall des Jensenschen Satzes gegeben, während Cesàro[2]) den allgemeinen Satz wiedergefunden hat. Der oben gegebene Beweis rührt von Jensen her; A. Mikkelsen-Vendsyssel[3]) hat einen andern Beweis mitgeteilt, der auch von Knopp[4]) beinahe wortgetreu gefunden und publiziert worden ist; dieser Beweis geht von der Formel (11) aus.

38. Man hat den Satz § 19, I für $a_n = \sqrt{n}$, $\varphi_n = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ anzuwenden.

39. Für positive ganze p hat man die Formel

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} \cdot \binom{1}{n}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{n}^{\frac{1}{p}} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \binom{n}{n}^{\frac{1}{p}} \right) = p$$

zu beweisen.

Kapitel V.

Anwendungen auf die Elementartranszendenten.

§ 20. Die Exponentialfunktion e^x.

Als Anwendungen unserer vorhergehenden Theorie der Fundamentalreihen wollen wir die Zahlenfolge

(1) $$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x), \cdots, S_n(x), \cdots,$$

wo für jedes n

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

gesetzt worden ist, untersuchen. Wir haben dann vor allem den folgenden Satz zu beweisen:

I. *Die Zahlenfolge* (1) *ist für jeden endlichen Wert von* x *eine Fundamentalreihe; der Grenzwert von* (2) *heißt die Exponentialfunktion und wird als* e^x *bezeichnet; es ist also*

(2) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Dem allgemeinen Konvergenzprinzip zufolge haben wir für n hinlänglich groß, also z. B. $n \geqq |x|$, die Differenz

1) Mathematische Annalen Bd. 33, p. 237—245; 1888.

2) Rendiconti della R. Accad. die Lincei (4) Bd. 4, p. 116; 1888. Nouvelles Annales (3) Bd. 7, p. 54; 1888. Rendiconti del Circolo mat. die Palermo Bd. 1, p. 225; 1887.

3) Vorgetragen in der Kopenhagener Mathematischen Vereinigung in der Sitzung am 19. Februar 1907.

4) Dissertation: Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, p. 14. Berlin 1907.

$$(3) \qquad S_{n+p}(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)!}$$

zu untersuchen; da offenbar für $p \geqq 2$ immer

$$(n+2)(n+3)\cdots(n+p) > (n+1)^{p-1}$$

ist, so hat man wegen (3)

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{n+1} + \left(\frac{|x|}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{|x|}{n+1}\right)^{p-1}\right),$$

woraus durch Summation der endlichen geometrischen Reihe, die durch die entsprechende unendliche ersetzt wird, was offenbar erlaubt ist, weil sämtliche Glieder positiv sind, folgt:

$$(4) \qquad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n+1-|x|}.$$

Es sei nun k eine solche positive ganze Zahl, daß $k \leqq |x| < k+1$ ist; dann hat man

$$\frac{|x|^{n+1}}{n!} = \frac{|x|^{k+1}}{k!} \cdot \frac{|x|}{k+1} \cdot \frac{|x|}{k+2} \cdots \frac{|x|}{n} < \frac{|x|^{k+1}}{k!} \cdot \left(\frac{|x|}{k+1}\right)^n,$$

woraus deutlich hervorgeht, daß (1) eine Fundamentalreihe sein muß; denn k ist ja eine endliche und bestimmte Zahl.

Will man den Wert von e^x annäherungsweise berechnen, so wendet man die endliche Summe $S_n(x)$ als Annäherungswert an; die Formel (4) ergibt dann eine höhere Grenze des absoluten Betrages des so begangenen Fehlers.

Von den elementaren Rechnenoperationen mit Fundamentalreihen liefert nur die Multiplikation ein interessantes Resultat für (1). Bei der Untersuchung der Fundamentalreihe mit dem allgemeinen Elemente

$$(5) \qquad S_n(x)S_n(y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!}\right)$$

führen wir die Multiplikation rechter Hand aus und betrachten zuerst die Glieder von der Form

$$(6) \qquad \frac{x^q}{q!} \cdot \frac{y^{p-q}}{(p-q)!} = \binom{p}{q} \cdot \frac{x^q y^{p-q}}{p!}, \quad q = 0, 1, 2, \cdots, p, \quad 0 < p \leqq n;$$

die Summe dieser Glieder wird offenbar für jedes p gleich

$$\frac{(x+y)^p}{p!},$$

und die Summe sämtlicher Glieder (6) wird daher genau $S_n(x+y)$.

Es bleibt uns demnach nur übrig die Glieder von der Form

$$\frac{x^p}{p!}\cdot\frac{y^q}{q!},\quad q=n,\ n-1,\cdots,\ n-p+1,\quad 1\leq p\leq n \tag{7}$$

zu untersuchen; diese Glieder kommen offenbar sämtlich in der Differenz

$$S_{2n}(x+y)-S_n(x+y) \tag{8}$$

vor, ohne jedoch diese Differenz vollständig zu erschöpfen; in (7) kommt nämlich z. B. nur das Glied $x^n y^n$, in (8) aber sämtliche Glieder von $(x+y)^n$ vor.

Da nun die Glieder in (8) für positive x und y sämtlich positiv sind, so ist der absolute Betrag von (8) in diesem Falle gleich der Summe der absoluten Beträge dieser Glieder; setzt man daher allgemein $a=|x|$, $b=|y|$, so hat man immer

$$|S_n(x)S_n(y)-S_n(x+y)|\leq S_{2n}(a+b)-S_n(a+b),$$

woraus wegen I der Satz folgt:

II. *Sind x und y willkürliche endliche Zahlen, so haben die beiden Fundamentalreihen*

$$S_0(x)S_0(y),\ S_1(x)S_1(y),\ \cdots,\ S_n(x)S_n(y),\ \cdots$$
$$S_0(x+y),\ S_1(x+y),\ \cdots,\ S_n(x+y),\ \cdots$$

denselben Grenzwert; es ist also immer

$$e^x\cdot e^y=e^{x+y}. \tag{9}$$

Die Analogie dieser Formel mit einem elementaren Potenzsatze liegt auf der Hand und ist offenbar die Ursache der sonderbaren Bezeichnung e^x für den Grenzwert der Fundamentalreihe (1). Diese Analogie kann indessen noch viel weiter geführt werden; aus (9) erhält man in der Tat, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$(e^x)^n=e^{nx}. \tag{10}$$

Aus der Definition (2) findet man den speziellen Satz:

III. *Ist $|x|\leq 1$, so hat man die Ungleichungen*

$$1-2|x|<|e^x|<1+2|x|. \tag{11}$$

Man hat in der Tat

$$|e^x|<1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\frac{|x|^3}{3!}+\cdots=e^{|x|} \tag{12}$$

und

$$|e^x|>1-\frac{|x|}{1!}-\frac{|x|^2}{2!}-\frac{|x|^3}{3!}-\cdots;$$

weiter ist offenbar $n!\geq 2^{n-1}$ und $|x|^n\leq|x|$; also hat man

$$1 - |x|\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) < |e^x| < 1 + |x| \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right),$$

und das Resultat (11) kann nun durch Summation der geometrischen Reihen hergeleitet werden.

Aus (1) findet man, für jedes n, $S_n(0) = 1$; es ist daher auch

$$e^0 = 1, \tag{13}$$

und diese Gleichung ist sicher für jeden anderen Wert von x, welcher der Bedingung $|x| \leqq \frac{1}{2}$ genügt, unmöglich.

Setzt man daher in (9) $y = -x$, so ergibt sich die Relation

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \tag{14}$$

also eine neue Analogie mit dem elementaren Potenzbegriffe.

Aus (11) findet man noch den wichtigen Satz:

IV. *Ist die Zahlenfolge*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{15}$$

eine willkürliche Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a, so ist die neue Folge

$$e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, e^{\alpha_3}, \cdots e^{\alpha_n} \cdots \tag{16}$$

auch eine Fundamentalreihe, und ihr Grenzwert ist gleich e^a.

Man hat in der Tat wegen (9) und (11) für alle hinlänglich großen n

$$|e^{\alpha_{n+p}} - e^{\alpha_n}| = |e^{\alpha_n}(e^{\alpha_{n+p} - \alpha_n} - 1)| < 2e^{|\alpha_n|} \cdot |\alpha_{n+p} - \alpha_n|, \tag{17}$$

woraus deutlich hervorgeht, daß die Folge (16) eine Fundamentalreihe sein muß, wenn dies mit (15) der Fall ist.

Ist nun weiter für $n \geqq N$ immer $|\alpha_{n+p} - \alpha_n| < \varepsilon$, so hat man wegen § 10, II auch für $n \geqq N$ immer $|a - \alpha_n| < 2\varepsilon$, woraus wegen (17)

$$|e^a - e^{\alpha_n}| < 4e^{|\alpha_n|} \cdot \varepsilon$$

hervorgeht; die Fundamentalreihe (16) hat also den Grenzwert e^a.

Wir haben noch einige Eigenschaften von e^x für *reelle* x näher zu betrachten:

V. *Sind a und b reell, und hat man* $a > b$, *so ist auch*

$$e^a > e^b. \tag{18}$$

Es ist in der Tat wegen (9) $e^a - e^b = e^b(e^{a-b} - 1)$; nun folgert man unmittelbar aus (2), daß $e^x - 1$ positiv ist, wenn x selbst positiv angenommen wird; aus (14) geht dann hervor, daß e^{-x} auch positiv, für positive x, sein muß, und damit ist (18) bewiesen.

VI. *Für positive x hat man die Ungleichungen:*

$$e^x > \frac{x^p}{p!}, \quad e^{-x} < \frac{p!}{x^p}, \quad e^x > 1 + x, \tag{19}$$

wo p eine willkürliche endliche positive ganze Zahl bezeichnet.

Die erste und dritte dieser Ungleichungen sind unmittelbare Folgen der Definition (2), weil wir nur eins oder zwei Glieder der Summe rechter Hand mitgenommen haben; die zweite Ungleichung ist dann eine unmittelbare Folge der ersten, wenn man die Identität (14) anwendet.

VII. *Ist x eine willkürliche endliche positive Größe, so hat man*

$$\frac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x. \tag{20}$$

Aus der letzten Ungleichung (19) findet man unmittelbar

$$\frac{1}{1+x} > e^{-x}, \quad 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 1 - e^{-x};$$

ist weiter $0 < x < 1$, so hat man wegen (2)

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \cdots,$$

woraus unmittelbar

$$e^{-x} > 1 - x, \quad 1 - e^{-x} < x \tag{21}$$

hergeleitet werden kann; denn die eingeklammerten Differenzen sind sämtlich positiv; ist aber $x \geqq 1$, so sind die Ungleichungen (21) einleuchtend; denn man hat dann immer $e^{-x} > 0$ und $1 - x \leqq 0$.

VIII. *Ist x reell, und $-1 \leqq x \leq +1$ so hat man die Ungleichungen*

$$x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x}. \tag{22}$$

Man hat in der Tat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \cdots\right);$$

da nun die eingeklammerte Größe rechter Hand stets positiv ist für $-1 < x \leq +1$, so hat man $e^x > 1 + x$ und $e^{-x} > 1 - x$, also $e^x < 1 : (1 - x)$, woraus (22) unmittelbar folgt.

Die unendliche Summe rechter Hand in (2) ist von Newton[1]) in die Analysis eingeführt worden; Euler[2]) setzt $e^1 = e$; es ist also

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \tag{23}$$

1) De analysi per aequationes (1669). Opuscula Newtoni, Bd. I. p. 22—23.
2) Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1737. Bd. 9, p. 187.

40. Sind n und p positiv ganz und $n > p$, so findet man durch vollständige Induktion die Ungleichungen

$$1 \geqq \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n^p} > 1 - \frac{p(p-1)}{2n}.$$

41. Bedeutet x eine willkürliche endliche Zahl, während n und p positiv ganz sind, so daß $n > p \geqq 2$ ist, so hat man

$$\left| \binom{n}{p} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^p - \frac{x^p}{p!} \right| < \frac{|x|^p}{2n \cdot (p-2)!}.$$

42. Ist x eine willkürliche endliche Zahl, so ist die Folge

$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)^1, \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2, \quad \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3, \cdots, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \cdots$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte e^x. (Euler[1]).

43. Ist n positiv ganz, x willkürlich endlich, so hat man den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right) = e^{-x}.$$

44. Es ist zu beweisen, daß die Zahlenfolge in Aufgabe 42 monoton wachsend ist, wenn x positiv angenommen wird.

45. Man hat zu beweisen, daß die Zahl e irrational ist. (Euler[2]).

§ 21. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$.

Aus der Fundamentalreihe § 20, (1) bilden wir zwei neue mit dem allgemeinen Elemente

$$\frac{S_n(ix) + S_n(-ix)}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\frac{S_n(ix) - S_n(-ix)}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

wo der Kürze halber $2m = n$ oder $2m = n-1$ bzw. $2m+1 = n-1$ oder $2m+1 = n$ gesetzt worden ist, je nachdem n gerade oder ungerade vorausgesetzt wird; bezeichnen nun $\cos x$ und $\sin x$ die Grenzwerte dieser Fundamentalreihen, so hat man demnach

$$(1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(2) \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

und wegen § 20, (1) und (2) die Formeln von Euler[3]):

1) Miscellanea Berolinensia Bd. 7, p. 177; 1743.

2) Commentarii Acad. Petropolitanae ad annuum 1737 Bd. 9, p. 120—121.

3) Man vergleiche z. B. Introductio in analysin infinitorum Bd. I, § 139; 1748.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{3}$$

woraus die weiteren Relationen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{4}$$

unmittelbar hergeleitet werden können.

Aus § 20, (9) erhält man wegen (4)

$$\cos(x + y) \pm i \sin(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \pm i (\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$

woraus die Formeln

$$\left| \begin{array}{l} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{array} \right. \tag{5}$$

unmittelbar entfließen; weiter hat man aus der Definition der Fundamentalreihen, welche $\cos x$ und $\sin x$ als Grenzwerte haben

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0. \tag{6}$$

Aus (3) ergibt sich ohne weiteres, daß

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{7}$$

sein muß; da nun sowohl $\cos x$ als $\sin x$ für reelle x beide reell sein müssen, hat man wegen (7) für solche Werte von x immer

$$-1 \leq \cos x \leq +1, \quad -1 \leqq \sin x \leqq +1. \tag{8}$$

Aus (1) und (2) findet man die beiden Ungleichungen

$$|\sin x - x| < \frac{|x|^3}{6} \cdot \frac{20}{20 - |x|^2}, \quad |x|^2 < 20 \tag{9}$$

$$|\cos x - 1| < \frac{|x|^2}{2} \cdot \frac{12}{12 - |x|^2}, \quad |x^2| < 12. \tag{10}$$

Man hat in der Tat

$$|\sin x - x| < \frac{|x|^2}{3!} + \frac{|x|^5}{5!} + \cdots + \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots;$$

weiter ist, für $n \geqq 2$, $2n(2n+1) \geqq 20$, und also hat man

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 2n \cdot (2n+1) > 6 \cdot 20^{n-1},$$

woraus folgt:

$$\sin x - x | < \frac{x^3}{6} \left(1 + \frac{|x^2|}{20} + \frac{|x^4|}{20^2} + \cdots\right) = \frac{|x^3|}{6} \cdot \frac{20}{20 - |x^2|};$$

in ganz ähnlicher Weise leitet man nun auch die Ungleichung (10) ab. Aus (3) findet man wegen § 20, IV den ähnlichen Satz:

I. *Ist die Zahlenfolge*

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{11}$$

eine willkürliche Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a, so sind die beiden Zahlenfolgen

$$\begin{cases} \cos\alpha_0, & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \ldots, & \cos\alpha_n, & \ldots \\ \sin\alpha_0, & \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \ldots, & \sin\alpha_n, & \ldots \end{cases} \tag{12}$$

Fundamentalreihen mit dem Grenzwerte $\cos a$ *und* $\sin a$.

Ist nun weiter $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, so hat man wegen (1)

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \cdots > 0;$$

andererseits ergibt sich aber

$$\cos 2 = -\left(1 - \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots < 0;$$

die Zahlen $\alpha_0 = \sqrt{2}$, $\beta_0 = 2$ haben daher die Eigenschaften, daß

$$\cos x > 0, \quad 0 < x \leq \alpha_0, \quad \cos\beta_0 < 0$$

ist. Zwischen α_0 und β_0 schalten wir zwei neue Zahlen α_1 und β_1 ein, so daß $\alpha_1 > \alpha_0$, $\beta_1 < \beta_0$, $\beta_1 > \alpha_1$ und $\beta_1 - \alpha_1 \leq \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_0)$ ist, und so daß man

$$\cos x < 0, \quad 0 \leq x \leq \alpha_1, \quad \cos\beta_1 < 0$$

hat, usw.

Die durch dieses Verfahren bestimmten Annäherungsreihen

$$\begin{cases} \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, \cdots, & \beta_n \cdots \\ \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, \cdots, & \alpha_n \cdots, \end{cases} \qquad \beta_n - \alpha_n \leq \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \tag{13}$$

haben daher die Eigenschaft, daß für jedes n

$$\cos x > 0, \quad 0 < x \leq \alpha_n, \quad \cos\beta_n < 0 \tag{14}$$

ist.

Bezeichnet nun $\frac{1}{2}\pi$ die Grenzzahl der Annäherungsreihen (13), so ist diese Grenzzahl gemeinsam für alle diejenigen Annäherungsreihen, deren Elemente den Bedingungen (14) genügen.

Dem Satze I zufolge haben die beiden Fundamentalreihen

$$\cos\beta_0, \quad \cos\beta_1, \quad \cos\beta_2, \cdots, \quad \cos\beta_n, \cdots \tag{15}$$

$$\cos\alpha_0, \quad \cos\alpha_1, \quad \cos\alpha_2, \cdots, \quad \cos\alpha_n, \cdots \tag{16}$$

den gemeinsamen Grenzwert $\cos\frac{1}{2}\pi$; dieser Grenzwert muß daher gleich Null sein; denn die Elemente der Fundamentalreihe (15) sind sämtlich negativ, diejenigen von (16) aber sämtlich positiv; es ist demnach

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0. \tag{17}$$

Aus (2) findet man $\sin x > 0$ für $0 < x \leq 2$; es ist daher wegen (7)

$$\sin \frac{\pi}{2} = +1, \tag{18}$$

und somit erhält man aus (5)

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x, \quad \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x, \tag{19}$$

woraus die beiden anderen Formelpaare

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x, \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin x \tag{20}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \tag{21}$$

hergeleitet werden können; aus (20) ergibt sich speziell

$$\cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0. \tag{22}$$

Ganz wie in der elementaren Goniometrie leitet man aus (5) die anderen Formeln

$$\begin{cases} \sin a - \sin b = 2 \sin \dfrac{a-b}{2} \cdot \cos \dfrac{a+b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a-b}{2} \cdot \sin \dfrac{a+b}{2} \end{cases} \tag{22a}$$

ab, woraus ohne Mühe die wichtigen Ungleichungen

$$\sin a > \sin b, \quad +\frac{\pi}{2} \geqq a > b \geqq -\frac{\pi}{2} \tag{23}$$

$$\cos a < \cos b, \qquad \pi \geqq a > b \geqq 0 \tag{24}$$

hervorgehen; denn man hat wegen (6) und (14) $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$, und $\cos x > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.

Aus diesen Bemerkungen beweisen wir nunmehr den wichtigen Satz:

II. *Die drei Gleichungen*

$$\cos(x + \omega) = \cos x, \quad \sin(x + \omega) = \sin x, \quad e^{x+i\omega} = e^x \tag{25}$$

sind dann und nur dann für jeden Wert von x richtig, wenn $\omega = 2p\pi$ ist, wo p eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Daß die Gleichungen (25) für $\omega = 2p\pi$, x willkürlich, richtig sind, geht unmittelbar aus (21) und (4) hervor. Setzt man weiter $\omega = a + ib$, wo a und b reell sind, so erhält man aus der letzten Gleichung (25)

$$e^{ia-b} = e^{-b}(\cos a + i \sin a) = 1, \quad e^{-b} \cos a = 1, \quad e^{-b} \sin a = 0;$$

da nun für b reell immer $e^{-b} > 0$ sein muß, so hat man $\sin a = 0$, woraus wegen (22) und (23) $a = p\pi$, p ganz, und somit ergibt sich $e^{-b} = (-1)^p$, so daß p gerade und $b = 0$ sein muß.

Aus II findet man nun ohne Mühe den folgenden Satz:

III. *Die Gleichungen* $\cos x = 0$ *und* $\sin x = 0$ *sind dann und nur dann möglich, wenn* $x = \frac{1}{2}\pi + p\pi$ *bzw.* $x = p\pi$ *ist, wo* p *eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.*

Ist nämlich z. B. $\cos\omega = 0$, so findet man ganz wie vorher $\cos(x + 4\omega) = \cos x$, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Wir setzen noch wie in der elementaren Goniometrie

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = -i + \frac{2i}{e^{i2x} + 1} \tag{26}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}} = i + \frac{2i}{e^{i2x} - 1}. \tag{27}$$

§ 22. Die Multiplikation komplexer Zahlen. Die geometrische Reihe.

Aus den Ungleichungen § 21, (23) und (24) ergibt sich, daß die Gleichungen

$$\cos x = a, \quad \sin x = a, \quad -1 \leqq a \leqq +1 \tag{1}$$

eine und nur eine Lösung $x = v_1$ bzw. $x = v_2$ besitzen, so daß $0 \leqq v_1 \leqq \pi$ bzw. $-\frac{1}{2}\pi \leqq v_2 \leqq +\frac{1}{2}\pi$ ist.

Daß jedenfalls nicht mehr als eine Lösung die obengenannten Bedingungen befriedigen kann, geht unmittelbar aus den obengenannten Ungleichungen hervor; daß aber auch eine solche Lösung wirklich existiert, wird durch das gewöhnliche Verfahren bewiesen.

Betrachten wir z. B. die Gleichung $\cos x = a$, so können wir die beiden extremen Fälle $a = +1$ und -1 übergehen; denn für diese Werte kennen wir schon alle Lösungen unserer Gleichung. Es seien dann α_0 und β_0 zwei Zahlen, die so gewählt sind, daß $\pi > \alpha_0 > \beta_0 > 0$ und $\cos\alpha_0 < a < \cos\beta_0$ ist; ist das arithmetische Mittel m_1 zwischen α_0 und β_0, also $2m_1 = \alpha_0 + \beta_0$, eine Lösung der Gleichung, so sind wir damit fertig, wenn nicht, so ist z. B. $\cos m_1 < a$; dadurch haben wir die zwei neuen Zahlen α_1 und β_1 in solcher Weise bestimmt, daß $\alpha_0 > \alpha_1 = m_1 > \beta_1 = \beta_0$, $\cos\alpha_1 < a < \cos\beta_1$ und $\alpha_1 - \beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \beta_0)$ ist; nun wird das arithmetische Mittel m_2 zwischen α_1 und β_1 eingeführt usw.

Die durch das angedeutete Verfahren bestimmten Annäherungsreihen

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n, & \cdots \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \cdots, & \beta_n, & \cdots \end{cases} \qquad \alpha_n - \beta_n = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^n}$$

haben dann die Eigenschaft, daß für jedes n

$$(3)\qquad \cos\alpha_n < a < \cos\beta_n$$

ist; bezeichnet v die Grenzzahl der Annäherungsreihen (2), so haben wegen § 21, I. die beiden Fundamentalreihen

$$\cos\beta_0,\ \cos\beta_1,\ \cos\beta_2,\ \cdots,\ \cos\beta_n,\ \cdots$$
$$\cos\alpha_0,\ \cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \cdots,\ \cos\alpha_n,\ \cdots$$

den gemeinsamen Grenzwert $\cos v$; andererseits ist dieser Grenzwert aber vermöge (3) auch gleich a, also hat man

$$\cos v = a.$$

Es seien nun v_1 und v_2 die oben angedeuteten Lösungen der Gleichungen (1); dann werden die vollständigen Lösungen dieser Gleichungen

$$(4)\qquad x = \pm v_1 + 2p\pi, \qquad x = (-1)^p v_2 + p\pi,$$

wo p eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Sind sowohl $\cos x$ als $\sin x$ bekannt, so ist x selbst bis auf einen Vielfaches von 2π bestimmt.

Betrachten wir nunmehr die komplexe Zahl

$$(5)\qquad x = a + ib = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right), \qquad r = +\sqrt{a^2 + b^2},$$

so kann man eine Zahl v so bestimmen, daß

$$(6)\qquad \cos v = \frac{a}{r}, \quad \sin v = \frac{b}{r}$$

ist; denn die Summe der Quadrate dieser beiden Zahlen ist ja der Einheit gleich; dadurch erhalten wir die folgende Darstellung der Zahl x

$$(7)\qquad x = r(\cos v + i\sin v) = r\cdot e^{iv};$$

die Zahl v oder allgemeiner $v + 2p\pi$ heißt die *Phase* der Zahl x.

Es sei nunmehr

$$(8)\qquad x_1 = a_1 + ib_1 = r_1\cdot e^{iv_1}$$

eine komplexe Zahl; dann erhalten wir die viel bequemere Multiplikationsregel

$$(9)\qquad xx_1 = rr_1 e^{i(v+v_1)} = rr_1\cdot(\cos(v+v_1) + i\sin(v+v_1));$$

die natürlich wegen (6) und der entsprechenden zur Zahl x_1 gehörigen Formeln mit § 16, (14) oder § 17, (6) identisch wird.

Für positive ganze n erhält man aus (9) die sogenannte Formel von Moivre:

$$(10) \qquad (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n (\cos nv + i \sin nv),$$

die jedoch auch für komplexe v gültig bleibt; durch die Formel (10) kann man ganz in derselben Weise wie in der elementaren Arithmetik die binomische Gleichung $x^n = a$ auflösen.

Als eine andere Anwendung der Formel (10) wollen wir die geometrische Reihe

$$(11) \qquad 1 + re^{iv} + r^2 e^{i2v} + \cdots + r^{n-1} e^{i(n-1)v} = \frac{1 - r^n e^{inv}}{1 - re^{iv}}$$

für ein unbegrenzt wachsendes n untersuchen.

Ist $|r| < 1$, so hat man

$$1 + re^{iv} + r^2 e^{i2v} + r^3 e^{i3v} + \cdots = \frac{1}{1 - re^{iv}} = \frac{1 - r\cos v + ir \sin v}{1 - 2r\cos v + r^2},$$

woraus, indem man $-v$ anstatt v einführt und die beiden so erhaltenen Formeln addiert und subtrahiert, folgt:

$$(12) \qquad 1 + r\cos v + r^2 \cos 2v + r^3 \cos 3v + \cdots = \frac{1 - r\cos v}{1 - 2r\cos v + r^2}$$

$$(13) \qquad r \sin v + r^2 \sin 2v + r^3 \sin 3v + \cdots = \frac{r \sin v}{1 - 2r\cos v + r^2};$$

diese beiden Formeln, die man Euler[1]) verdankt, sind also anwendbar für $|r| < 1$, gleichviel ob r reell oder komplex ist.

Ist $r > 1$, so wächst der absolute Betrag unserer Reihensumme mit n über jede Grenze hinaus; ist endlich $r = 1$ aber $v + 2p\pi$, so wird unsere Summe stets endlich aber unbestimmt; hat man

$$(14) \qquad \frac{v}{\pi} = \frac{p}{q},$$

wo der Bruch rechter Hand irreduzibel ist, so hat unsere Reihensumme q verschiedene Werte je nachdem n durch Division mit q den Rest $0, 1, 2, \cdots, q - 1$ liefert; ist aber der Bruch (14) irrational, so kann mindestens eine der Zahlen $\cos nv$ und $\sin nv$ wegen § 7, IV jedem zwischen ± 1 gelegenen Zahlenwerte beliebig nahe kommen

---

Man hat die folgenden Formelpaare zu beweisen und die Bedingungen für ihre Anwendbarkeit zu diskutieren; v ist eine reelle Zahl:

46. $$\frac{\cos v}{2\cos v} + \frac{\cos 2v}{(2\cos v)^2} + \frac{\cos 3v}{(2\cos v)^3} + \cdots = \cos 2v$$

---

1) Introductio in analysin infinitorum, Bd. I, § 258; 1748.

$$\frac{\sin v}{2\cos v} + \frac{\sin 2v}{(2\cos v)^2} + \frac{\sin 3v}{(2\cos v)^3} + \cdots = \sin 2v\,.$$

47. $2\cos v\cdot\cos v + 2^2\cos^2 v\cdot\cos 2v + 2^3\cos^3 v\cdot\cos 3v + \cdots = -2\cos^2 v$

$$2\cos v\cdot\sin v + 2^2\cos^2 v\cdot\sin 2v + 2^3\cos^3 v\cdot\sin 3v + \cdots = \sin 2v\,.$$

48. $\cos v\cdot\cos v + \cos^2 v\cdot\cos 2v + \cos^3 v\cdot\cos 3v + \cdots = 0$

$$\cos v\cdot\sin v + \cos^2 v\cdot\sin 2v + \cos^3 v\cdot\sin 3v + \cdots = \cot v\,.$$

§ 23. Der natürliche Logarithmus.

I. *Bedeutet a eine willkürliche, endliche, positive Zahl, so hat die Gleichung*

(1) $$e^x = a$$

eine und nur eine reelle Lösung in x, nämlich den natürlichen Logarithmus $x = \log a$; es ist demnach

(2) $$e^{\log a} = a\,.$$

Daß die Gleichung (1) nicht mehr als eine reelle Lösung für x gestattet, liegt auf der Hand, weil $e^x > e^y$ sein muß, wenn $x > y$ ist. Daß aber wirklich auch *eine* Lösung existiert, wird durch dasselbe Verfahren wie in § 22 bewiesen.

Unter Anwendung der Definition (2) in Verbindung mit § 20, (9), (10) erhält man die Formeln

(3) $$\begin{cases} \log(ab) = \log a + \log b\,,\ \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b\,, \\ \log(a^n) = n\log a\,, \end{cases}$$

wo in der letzten Formel n eine ganze Zahl bedeutet.

Da für $a > b$ auch $\log a > \log b$ sein muß, so hat man wegen § 20, (19) und (21) die anderen Ungleichungen

(4) $$\log(1+x) < x < -\log(1-x)\,,\quad 0 < x < 1\,,$$

von welchen jedoch die erste für alle endlichen positiven x anwendbar ist.

Setzt man nun in (4) nacheinander

$$x = \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \cdots\ \frac{1}{n}\,,$$

so ergibt die Addition aller so erhaltenen Resultate unter Anwendung der ersten Formel (3) die Ungleichungen

(5) $$\log\left(\frac{n+1}{2}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n\,,$$

von welchen wir verschiedene speziellere Sätze herleiten wollen.

Erstens erhalten wir unmittelbar aus (5) das folgende Resultat,

welches zum erstenmale von Jakob und Johann Bernoulli[1]) bewiesen worden ist:

II *Die monotone Zahlenfolge, deren allgemeines Element durch den Ausdruck*

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{6}$$

definiert wird, ist divergent.

Die Summe (6) wird gewöhnlich für unbegrenzt wachsendes n als die *harmonische Reihe* bezeichnet.

Aus (5) findet man zweitens nach einer leichten Umformung

$$1 + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n < 1; \tag{7}$$

setzt man demnach der Kürze halber

$$C_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

so hat man wegen (4)

$$C_{n-1} - C_n = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 0,$$

woraus der Satz sich ergibt:

III. *Die Zahlenfolge $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, \cdots$ ist monoton abnehmend und konvergent; ihr Grenzwert wird gewöhnlich als die Eulersche Konstante*[2]) *bezeichnet.*

Setzt man in den aus (4) erhaltenen Ungleichungen

$$x < -\log(1-x), \quad x > \log(1+x)$$

bzw.

$$x = 1 - \frac{b}{a}, \quad x = \frac{a}{b} - 1,$$

so erhält man

$$\frac{a-b}{a} < \log a - \log b < \frac{a-b}{b}, \quad a > b > 0, \tag{8}$$

welche Formel erheblich verallgemeinert werden kann; setzt man in der Tat

$$\log_2(x) = \log(\log x), \quad \log_n(x) = \log(\log_{n-1}(x)),$$

so erhält man erstens aus (8), wenn $b > e$, also $\log b > 0$, angenommen wird:

$$\frac{\log a - \log b}{\log a} < \log_2(a) - \log_2(b) < \frac{\log a - \log b}{\log b},$$

1) Jakob Bernoulli: Opera omnia, Bd. I, p. 392.

2) Commentarii Acad. Petropolitanae, Bd. 7, p. 157: 1734—1735 (1740). Vgl. mein Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 6—9. Leipzig 1906.

woraus wegen (8) hervorgeht:

$$\frac{a-b}{a\log a} < \log_2(a) - \log_2(b) < \frac{a-b}{b\log b};$$

in dieser Weise kann man offenbar fortfahren; durch vollständige Induktion erhält man dann allgemein

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{a-b}{a\log a \log_2 a \cdots \log_n(a)} < \log_{n+1}(a) - \log_{n+1}(b), \\ \log_{n+1}(a) - \log_{n+1}(b) < \dfrac{a-b}{b\log b \log b_2(b) \cdots \log_n(b)}, \end{cases}$$

wo man also $a > b$ und b so groß, daß $\log_n(b) > 0$ wird, annehmen muß. Dies Beweisverfahren verdankt man Pringsheim.[1])

Nach diesen Bemerkungen über natürliche Logarithmen positiver Zahlen beweisen wir nun ohne Mühe den allgemeinen Satz:

III. *Bezeichnet*

$$(10)\qquad a = r(\cos v + i\sin v) = re^{iv} = e^{\log r + iv}$$

eine willkürliche endliche von 0 *verschiedene Zahl, so hat die Gleichung*

$$(11)\qquad e^x = a$$

unendlich viele Lösungen, die eine arithmetische Reihe mit der Differenz $2\pi i$ *bilden und gemeinsam durch das Symbol* $\operatorname{Log} a$ *bezeichnet werden.*

Setzt man in der Tat $x = \alpha + i\beta$, so ergibt sich wegen (10) und (11)

$e^{\alpha+i\beta} = e^{\log r + iv}$, $\alpha + i\beta = \log r + iv + 2p\pi i$, $\alpha = \log r$, $\beta = v + 2p\pi$,

wo p eine willkürliche ganze Zahl bedeutet; es ist demnach allgemein

$$(12)\qquad \operatorname{Log} a = \log|a| + i(v + 2p\pi).$$

In (10) ist es immer möglich, in solcher Weise über die Zahl v zu verfügen, daß, wenn speziell a nicht negativ reell ist, immer $-\pi < v < +\pi$ ist; der dazu für $p = 0$ gehörige Wert von $\operatorname{Log} a$ wird durch $\log a$ bezeichnet und heißt der *Hauptwert* dieses Logarithmus; es ist daher

$$(13)\qquad \log a = \log|a| + iv, \quad -\pi < v < +\pi;$$

ist speziell $-a$ eine negative reelle Zahl, so kann man nach Belieben

$$(14)\qquad \log(-a) = \log a \pm \pi i$$

für den Hauptwert anwenden.

Für den allgemeinen Wert findet man demnach

$$(15)\qquad \operatorname{Log} a = \log a + 2p\pi i;$$

1) Mathematische Annalen, Bd. 35, p. 318; 1890.

die positiven reellen Zahlen sind die einzigen, deren natürliche Logarithmen einen reellen Hauptwert besitzen; denn nur in diesem Falle hat man $v = 0$. Aus (5) geht hervor, daß die für reelle Logarithmen bewiesenen Formeln (3) *nicht* für den allgemeinen Logarithmenbegriff aufrechterhalten werden können; es ist in der Tat z. B.

$$\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b + 2p\pi i.$$

Beispiel 1. $\log 1 = 0$, $\operatorname{Log} 1 = 2p\pi i$.

Beispiel 2. $\log(-1) = \pm\pi i$, $\operatorname{Log}(-1) = (2p+1)\pi i$.

Beispiel 3. Aus $a = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $b = e^{\frac{\pi i}{4}}$ findet man für die Hauptwerte

$$\log a + \log b = \log(ab)$$

Beispiel 4. Setzt man aber $a = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $b = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, so hat man

$$\log a + \log b = \log(ab) + \pi i.$$

Die obengenannten Formeln gelten also nicht einmal allgemein für die Hauptwerte der komplexen Logarithmen.

Aus der Definition § 20, (2) findet man einen Ausdruck von der Form

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + ax^2\right), \tag{16}$$

wo a für jeden endlichen Wert von x selbst endlich bleibt; da die Gleichung $e^x - 1 = 0$ nur für $x = 2p\pi i$ möglich ist, so kann der zu x gehörige Faktor rechter Hand in (16) nur für $x = 2p\pi i$, wo p eine endliche von 0 verschiedene ganze Zahl bezeichnet, verschwinden. Wenn x nicht eine Zahl dieser Form ist, erhält man daher

$$x = k(e^x - 1), \quad k \neq 0, \tag{17}$$

oder anders geschrieben

$$x = \frac{e^x - 1}{1 + \frac{x}{2} + ax^2}; \tag{18}$$

nun ist aber identisch für $y \neq -1$

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + \frac{y^2}{1+y},$$

woraus wegen (18) einen Ausdruck von der Form hervorgeht:

$$x = e^x - 1 - \frac{x}{2}(e^x - 1) + bx^2(e^x - 1), \quad x \neq 2p\pi i, \quad p \neq 0.$$

Ersetzt man nunmehr in dieser Formel den Faktor $\frac{1}{2}x$ rechter Hand durch den obenstehenden Ausdruck, so erhält man wegen (7)

$$x = e^x - 1 - \frac{(e^x-1)^2}{2} + A(e^x-1)^3, \tag{19}$$

wo A endlich bleibt, wenn x eine willkürliche endliche Zahl, nicht von der Form $2p\pi i$, $|p|$ positiv ganz, bedeutet.

Aus (19) findet man dann unmittelbar den wichtigen Hilfssatz:

IV. *Bedeutet y eine endliche von -1 verschiedene Zahl, so hat man für den Hauptwert des Logarithmus:*

$$\log(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + Ay^3, \tag{20}$$

wo A eine endliche Zahl bedeutet.

Setzt man in der Tat in (19) $x = \log(1+y)$, so bleibt x immer endlich, wenn y endlich und von -1 verschieden angenommen wird, und die Gleichung $\log(1+y) = 2p\pi i$, $p \neq 0$, ist für den Hauptwert des Logarithmus ausgeschlossen.

V. *Ist x eine solche reelle Zahl, daß $-1 \leqq x \leqq \infty$ ist, so gelten die Ungleichungen*

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x. \tag{21}$$

Da wegen § 20, (19) und (22) für $\infty \geqq x \geqq -1$ immer $e^x > 1+x$ ist, so hat man auch für diese Werte $\log(1+x) < x$, woraus, für $-\infty \leqq y \leqq 1$, $\log(1-y) < -y$ folgt; setzt man demnach in dieser letzten Ungleichung $y = x:(1+x)$, so ist unser Satz damit bewiesen.

Aus (9) ergibt sich der folgende Satz:

VI. *Bezeichnet $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ eine divergente monoton wachsende Zahlenfolge mit positiven Elementen, so daß*

$$\limsup_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = G < \infty$$

ist, so hat man für jedes endliche positive r

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log_r(A_{n+1})}{\log_r(A_n)} = 1. \tag{22}$$

Aus (8) ergibt sich in der Tat, daß (22) für $r = 1$ richtig sein muß; durch vollständige Induktion leitet man dann unmittelbar wegen (9) die allgemeine Formel (22) ab.

Aus (20) findet man weiter:

VII. *Ist $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ eine Fundamentalreihe mit lauter von Null verschiedenen Elementen und mit dem von Null verschiedenen*

Grenzwerte a, und bezeichnet $\operatorname{Log} x$ *einen willkürlichen aber bestimmten Wert des Logarithmus, so ist die Zahlenfolge*

$$\operatorname{Log}\alpha_0,\ \operatorname{Log}\alpha_1,\ \operatorname{Log}\alpha_2,\ \cdots,\ \operatorname{Log}\alpha_n,\ \cdots \tag{23}$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte $\operatorname{Log} a$.

---

49. Für jedes positive ganze n hat man die Ungleichungen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

§ 24. Potenz mit willkürlichem Exponent.

Bedeutet n eine willkürliche ganze Zahl, so hat man wegen § 20, (10)

$$a^n = (e^{\operatorname{Log} a})^n = e^{n \operatorname{Log} a}; \tag{1}$$

diese Identität wählen wir als Definition des Potenzbegriffes, wenn der Exponent keine ganze Zahl ist; wir setzen also, indem ω eine willkürliche reelle oder nicht reelle endliche Zahl bezeichnet:

$$a^\omega = e^{\omega \operatorname{Log} a}. \tag{2}$$

Diese allgemeine Potenz hat daher unendlich viele Werte, wenn der Exponent keine *rationale* Zahl bedeutet; ist diese Potenz mehrdeutig, ist also n keine ganze Zahl, so bilden die verschiedenen Werte dieser Potenz eine geometrische Reihe mit dem Quotienten

$$e^{2\pi\omega i}. \tag{3}$$

Wählt man in (2) für den Logarithmus seinen Hauptwert $\log a$, so nennt man den entsprechenden Wert der Potenz den Hauptwert dieser vieldeutigen Zahl; es ist also für diesen Hauptwert

$$a^\omega = e^{\omega \log a}. \tag{4}$$

Beispiel 1. Die Annahme $x = \omega = i$ gibt den Hauptwert

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}, \tag{5}$$

während der allgemeine Wert dieser Potenz

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2p\pi} \tag{6}$$

wird, wo p eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Die elementaren Potenzsätze gelten natürlich im allgemeinen nicht für den allgemeinen Potenzbegriff (2); man hat z. B.

$$a^\omega \cdot a^{\omega_1} = a^{\omega + \omega_1 + 2(p\omega + p_1\omega_1)\pi i}. \tag{7}$$

Nach diesen Bemerkungen haben wir nunmehr verschiedene Sätze über den Hauptwert der Potenz (3) herzuleiten:

I. *Der Hauptwert der Potenz a^ω wird dann und nur dann reell, wenn a positiv und ω reell angenommen wird.*

Setzt man in der Tat

$$a = r e^{i\varphi}, \quad \omega = \alpha + i\beta, \tag{8}$$

so hat man für den Hauptwert

$$a^\omega = e^{(\alpha + i\beta)(\log r + i\varphi)} = e^{\alpha \log r - \beta\varphi + (\alpha\varphi + \beta \log r)i}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$a^\omega = r^\alpha \cdot e^{-\beta\varphi} \cdot e^{(\alpha\varphi + \beta \log r)i} \tag{9}$$

woraus unser Satz unmittelbar hervorgeht; denn es ist in diesem Falle (und nur dann) $v = \beta = 0$.

Aus (9) findet man nun weiter

$$|a^\omega| = r^\alpha \cdot e^{-\beta\varphi}, \tag{10}$$

woraus für $\beta = 0$, also $\omega = \alpha$

$$|a^\alpha| = |a|^\alpha, \ \alpha \text{ reell} \tag{11}$$

folgt, und für $v = 0$, also $r = a$

$$|a^{\alpha + i\beta}| = a^\alpha, \ a \text{ positiv}. \tag{12}$$

II. *Ist $|a| = r > 1$, und bedeutet E eine vorgegebene willkürlich große positive Zahl, so ist es möglich eine solche positive Zahl k zu bestimmen, daß für $\alpha > k$ immer*

$$\left|\frac{a^\alpha}{\alpha^\varrho}\right| > E \tag{13}$$

wird, indem der Exponent ϱ eine willkürliche endliche Zahl bedeutet.

Setzt man nämlich $\varrho = \gamma + i\delta$, so hat man wegen (11) und (12)

$$\left|\frac{a^\alpha}{\alpha^\varrho}\right| = \frac{r^\alpha}{\alpha^\gamma} = \frac{e^{\alpha \log r}}{\alpha^\gamma} > \frac{\alpha^{p+1} \log r^{p+1}}{\alpha^\gamma \cdot (p+1)!} \tag{14}$$

denn es ist ja $r > 1$ also $\log r > 0$; ist nun p eine solche endliche positive ganze Zahl, daß $p > \gamma$ ist, so hat man wegen (14)

$$\left|\frac{a^\alpha}{\alpha^\varrho}\right| > \frac{\alpha (\log r)^{p+1}}{p+1)!} > E; \ \alpha > \frac{(p+1)! \, E}{(\log r)^{p+1}}. \tag{15}$$

Nimmt man in (13) und (15) den reziproken Wert, und setzt man $b = 1 : a$, $\varepsilon = 1 : E$, so kommt der ähnliche Satz:

II. *Ist* $|b|<1$, *und bezeichnet* ε *eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe, so ist es möglich eine solche positive Zahl* k *zu bestimmen, daß für* $\alpha \geqq k$ *immer*

$$|\alpha^{\varrho}\cdot b^{\alpha}|<\varepsilon \tag{16}$$

wird, indem der Exponent ϱ *eine willkürliche endliche Zahl bedeutet.*

Ist in (15) ϱ eine positive Zahl, und setzt man in dieser Ungleichung

$$a=e=r,\ \frac{1}{\varrho}=\delta,\ \varepsilon=\frac{1}{E^{\delta}},\ E=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}},$$

so erhält man $e^{\alpha}:\alpha^{\frac{1}{\delta}}>E$, also

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha\delta}}<\varepsilon,\ \alpha>\frac{(p+1)!}{\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}},$$

woraus durch die Substitution $\alpha=\log\beta$ die wichtige Ungleichung

$$\frac{\log\beta}{\beta^{\delta}}<\varepsilon,\ \log\beta>\frac{(p+1)!}{\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}} \tag{17}$$

folgt; δ bedeutet also hier eine willkürlich kleine aber angebbare positive Größe.

Aus der Potenzdefinition erhalten wir noch für den Hauptwert die Entwicklung

$$(1-x)^{\varrho}=e^{\varrho\log(1-x)}=1+\frac{\varrho\log(1-x)}{1!}+\frac{\varrho^2\log^2 1-x}{2!}+K\cdot\log^3(1-x),$$

wo K eine endliche Zahl bedeutet, falls x endlich und von der Einheit verschieden ist. Wegen der Formel § 23, (20) ergibt sich dann weiter

$$(1-x)^{\varrho}=1-\varrho x+\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}\cdot x^2+K_1\cdot x^3, \tag{18}$$

wo K_1 endlich ist, wenn dies mit K der Fall ist; wir bemerken noch, daß (18) auf folgende andere Form gebracht werden kann:

$$\frac{1-(1-x)^{\varrho}}{x}=\varrho-\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}x-K_1 x^2. \tag{19}$$

Aus § 23, VII findet man unmittelbar den ähnlichen Satz:

III. *Ist* $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ldots\ \alpha_n\ldots$ *eine Fundamentalreihe mit lauter von Null verschiedenen Elementen und dem von Null verschiedenen Grenz-*

werte a, und bezeichnet x^ω einen willkürlichen aber bestimmten Wert der Potenz, so ist die Zahlenfolge

$$\alpha_0^{\omega},\ \alpha_1^{\omega},\ \alpha_2^{\omega},\ \ldots,\ \alpha_n^{\omega},\ \ldots$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a^ω.

---

50. Für $\omega = p + i\alpha$, wo p eine ganze Zahl bedeutet, ist zu beweisen, daß die Phase der Potenz a^ω bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

51. Ist $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \ldots,\ \omega_n, \ldots$ eine willkürliche divergente Zahlenfolge, deren Elemente sämtlich von 0 verschieden sind, so hat man die andere Zahlenfolge

$$\left(1 + \frac{x}{\omega_1}\right)^{\omega_1},\ \left(1 + \frac{x}{\omega_2}\right)^{\omega_2},\ \ldots,\ \left(1 + \frac{x}{\omega_n}\right)^{\omega_n},\ \ldots$$

zu untersuchen, worin x eine willkürliche endliche Zahl bedeutet.

52. Bezeichnet $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots$ eine willkürliche Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte 0, so hat man die Zahlenfolge

$$\frac{x^{\omega_1} - 1}{\omega_1},\ \frac{x^{\omega_2} - 1}{\omega_2},\ \frac{x^{\omega_3} - 1}{\omega_3},\ \ldots,\ \frac{x^{\omega_n} - 1}{\omega_n},\ \ldots$$

zu untersuchen; x ist eine willkürliche endliche von Null verschiedene Zahl.

53. Aus den beiden positiven Zahlen a_1 und a_2 wird eine unendliche Folge positiver Zahlen $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots$ nach dem Gesetze gebildet, daß a_n von $n = 3$ an das geometrische Mittel zwischen a_{n-1} und a_{n-2} sein soll, also $a_n = \sqrt{a_{n-1}\, a_{n-2}}$; man hat dann die allgemeine Formel

$$a_{p+2} = a_2^{\frac{1}{3}(2 + (-\frac{1}{2})^p)} \cdot a_1^{\frac{1}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^p)}$$

zu beweisen und den Grenzwert der Zahlenfolge zu bestimmen.

54. Aus der Zahlenfolge in Aufgabe 53 wird eine andere Folge $u_1\ u_2\ u_3\ \ldots\ u_n\ \ldots$ gebildet, indem für jedes n

$$u_n = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n}$$

gesetzt wird; es ist der Grenzwert dieser Folge zu bestimmen.

55. Für $\varrho \geq 0$ hat man den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\log(n!)}{n^{1+\varrho}} \right)$$

zu bestimmen.

56. Es ist zu beweisen, daß die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Elemente

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\cdots+\frac{1}{\log n}\right)$$

monoton abnimmt und den Grenzwert Null hat.

§ 25. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

Bilden wir die komplexe Zahl

$$x = a + ib = r(\cos v + i \sin v) \tag{1}$$

in der Ebene in den Punkt $M\ (a, b)$ mit den rechtwinkligen Koordinaten a und b ab, so ist der dadurch definierte Zusammenhang zwischen den komplexen Zahlen und den Punkten der Ebene eineindeutig.

In unserer späteren Darstellung sprechen wir häufig über den „Punkt" x, indem wir damit denjenigen Punkt M, in welchem x abgebildet wird, verstehen.

Bei dieser geometrischen Darstellung wird, der Relation

$$r = +\sqrt{a^2+b^2}$$

wegen, der absolute Betrag r von x dem von O bis M positiv gerechneten Radiusvektor gleich, während die Phase v von x mit dem von der positiven Abszissenachse bis zum Radiusvektor OM gerechneten Winkel zusammenfällt; denn es ist ja

$$a = r\cos v,\ b = r\sin v.$$

Dadurch ergibt sich weiter, daß die von uns als Grenzwerte gewisser Fundamentalreihen definierten Funktionen $\cos v$ und $\sin v$ mit den elementaren trigonometrischen zusammenfallen.

Es seien nun $x = a + ib$, $y = a_1 + ib_1$ in den Punkten M und N, die Summe $z = x + y = a + a_1 + i\,(b + b_1)$ in den Punkt P abgebildet; dann sind O, M, P und N Eckpunkte eines Parallelogramms, so daß O und P entgegengesetzt sind; hieraus folgt unmittelbar der Satz:

I. *Sind die beiden komplexen Zahlen a und x in den Punkten A und M abgebildet, so repräsentiert die Strecke AM den absoluten Betrag $|x-a|$, und der Winkel v zwischen der positiven Abszissenachse und der geraden Linie AM ist die Phase der Differenz $x-a$.*

Sind nun die Zahlen a, x und y in den Eckpunkten A, M und N des Dreieckes AMN abgebildet, und setzt man

$$\frac{x-a}{y-a} = r(\cos v + i\sin v), \tag{2}$$

so ist r dem Verhältnis der Seiten AM und AN gleich, während die Phase φ (von dem Zeichen vielleicht abgesehen) mit dem Winkel MAN zusammenfällt; es ist also

$$r = \frac{AM}{AN}, \quad \varphi = \angle\, MAN. \tag{3}$$

Aus dem Satze I ergibt sich der folgende:

II. *Sind die komplexen Zahlen x und a in den Punkten M und A abgebildet, und dreht sich die gerade Linie AM um den Punkt A, bis sie wieder ihre ursprüngliche Lage erreicht, so wird die Phase von $x - a$ um $\pm 2\pi$ verändert, je nachdem diese Drehung in der positiven oder der negativen Richtung vorgenommen wird.*

Setzt man $a = 0$, so wird Log x demnach um $\pm 2\pi i$ geändert, wenn x einer geschlossenen Kurve folgend den Punkt O umkreist; durch diese Bewegung wird die allgemeine Potenz x^ω mit $e^{2\pi\omega}$ multipliziert.

Bekanntlich kann man auch in einfacher Weise die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch illustrieren; wir verzichten aber auf eine solche Darstellung, die für unsere spätere Darstellung ohne Bedeutung ist.

Wir sagen, daß die komplexe Zahl ein Kontinuum K durchläuft, wenn der entsprechende Punkt das Kurvenstück K oder den Areal K durchläuft.

Um die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen noch weiter zu erleuchten lösen wir die folgende Aufgabe:

Es ist derjenige Bereich der Ebene zu bestimmen, in welchem $|x^2 - a^2| < b^2$ wird, indem a und b reelle Strecken bezeichnen.

Setzen wir $x = \xi + i\eta$, also

$$x^2 = \xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta i,$$

so ergibt sich

$$(\xi^2 - \eta^2 - a^2)^2 + 4\,\xi^2\eta^2 < b^4;$$

der gesuchte Bereich wird demnach das Innere der Cassinischen Ellipse

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a^2(\xi^2 - \eta^2) = b^4 - a^4.$$

57. Es sind diejenigen Bereiche der Ebene, in welchen

$$(1) \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| < 1, \qquad (2) \quad \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| < 1$$

ist, zu bestimmen.

58. In welchem Bereiche der Ebene muß die komplexe Zahl x abgebildet werden, wenn die geometrischen Reihen

$$1 - x + (1 - x)\,x + (1 - x)\,x^2 + (1 - x)\,x^3 + \ldots$$
$$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{(x-1)^2}{x^3} + \frac{(x-1)^3}{x^4} + \ldots$$

beide konvergieren sollen, und welche Summe haben diese Reihen?

59. Zwei komplexe Zahlen x und y sind durch eine der Gleichungen

(1) $x = y^2 + y$, (2) $x^2 = y$, (3) $x = y^2$, (4) $x^2 y = 1$

verbunden; man hat in jedem Falle den geometrischen Ort von y zu bestimmen, wenn immer $x = 1 + it$ ist, also wenn x eine gerade Linie durchläuft.

Kapitel VI.

Über zweifach unendliche Zahlenfolgen.

§ 26. Konvergenz, Divergenz und Oszillation.

Ist die Zahl $a_{p,q}$ in solcher Weise von dem Zahlenpaare (p, q), wo p und q ganze nicht negative Zahlen bezeichnen, abhängig, daß wir ein, jedenfalls theoretisches, Mittel besitzen um $a_{p,q}$ zu bestimmen, wenn sowohl p als q aufgegeben werden, so sagen wir, daß diese Zahlen

$$\begin{array}{l} a_{0,0}\ a_{0,1}\ a_{0,2} \ldots a_{0,n} \ldots \\ a_{1,0}\ a_{1,1}\ a_{1,2} \ldots a_{1,n} \ldots \\ a_{2,0}\ a_{2,1}\ a_{2,2} \ldots a_{2,n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p,0}\ a_{p,1}\ a_{p,2} \ldots a_{p,n} \ldots \end{array}$$

eine zweifach unendliche Zahlenfolge oder eine Doppelfolge bilden; diese wird der Kürze halber durch $(a_{p,q})$ bezeichnet.

Die einfachen Zahlenfolgen

$$\begin{array}{l} a_{p,0}\ a_{p,1}\ a_{p,2} \ldots a_{p,n} \ldots \\ a_{0,q}\ a_{1,q}\ a_{2,q} \ldots a_{n,q} \ldots \end{array}$$

deren erste bzw. zweite Stellenzeiger denselben festen Wert haben, bilden die *Zeilen-* bzw. *Kolonnenfolgen* der Doppelfolge $(a_{p,q})$, während die Folge

$$a_{0,0}\ a_{1,1}\ a_{2,2} \ldots a_{p,p} \ldots$$

die *Diagonalfolge* von $(a_{p,q})$ genannt wird.

Ganz wie bei einfachen Zahlenfolgen haben wir hier drei verschiedene Fälle zu untersuchen, nämlich:

1. *Konvergente Doppelfolgen.* Es existiert eine solche endliche und bestimmte Zahl A, daß es möglich ist für eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe ε zwei solche ganze positive Zahlen P und Q zu bestimmen, daß für $p > P$ und $q \geqq Q$ immer

$$|A - a_{p,q}| < \varepsilon \tag{1}$$

wird. In diesem Falle heißt die Doppelfolge $(a_{p,q})$ konvergent mit dem Grenzwerte A, und wir setzen

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = A. \tag{2}$$

Es ist also wohl zu beachten, daß in (2) sowohl p als q in ganz willkürlicher Weise voneinander unabhängig über jede Grenze hinaus wachsen sollen.

2. *Divergente Doppelfolgen.* Wenn E eine vorgegebene willkürlich große positive Zahl ist, und es möglich ist zwei solche positive ganze Zahlen P und Q zu bestimmen, daß für $p \geqq P$ und $q \geqq Q$ immer

$$|a_{p,q}| > E \tag{3}$$

wird, so heißt die Doppelfolge $(a_{p,q})$ divergent.

Sind die $a_{p,q}$ für $p > P$ und $q \geqq Q$ sämtlich reell und entweder stets positiv oder stets negativ, so ist unsere Zahlenfolge eigentlich divergent, und wir setzen

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = -\infty. \tag{4}$$

3. *Oszillierende Doppelfolgen.* Die Folge $(a_{p,q})$ heißt oszillierend, wenn sie weder konvergiert noch divergiert.

Ganz wie in § 18 erhalten wir hier den Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Doppelfolge $(\alpha_{p,q} + i\beta_{p,q})$ mit komplexen Elementen besteht darin, daß die beiden Doppelfolgen $(\alpha_{p,q})$ und $(\beta_{p,q})$ mit reellen Elementen konvergieren; hat man*

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} \alpha_{p,q} = \alpha, \quad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} \beta_{p,q} = \beta, \tag{5}$$

so ist auch

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} (\alpha_{p,q} + i\beta_{p,q}) = \alpha + i\beta. \tag{6}$$

Wir können uns daher auf Untersuchungen von Doppelfolgen mit reellen Elementen beschränken. Als allgemeines Konvergenzprinzip für Doppelfolgen gilt dann der folgende Satz von Pringsheim[1]):

1) Mathematische Annalen Bd. 53, p. 291; 1900.

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *besteht darin, daß es für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe* ε *möglich ist entweder* 1. *zwei solche positive ganze Zahlen* P *und* Q *zu bestimmen, daß für* $p \geqq P$ *und* $q \geqq Q$ *immer*

$$|a_{p+r,\,q+s} - a_{p,q}| < \varepsilon \tag{7}$$

wird, indem r *und* s *willkürliche ganze nicht negative Zahlen bezeichnen, oder* 2. *eine solche positive ganze Zahl* m *zu bestimmen, daß für* $p \geqq m$ *immer*

$$|a_{p+r,p+s} - a_{p,p}| < \varepsilon \tag{8}$$

wird, indem r *und* s *willkürliche ganze nicht negative Zahlen bezeichnen, oder* 3. *eine solche positive Zahl* m *zu bestimmen, daß für* $p \geqq m$ *und* $q \geqq m$ *immer*

$$|a_{p,q} - a_{m,m}| < \varepsilon \tag{9}$$

wird. Diese drei Bedingungen haben genau dieselbe Tragweite.

Der Beweis dieses Satzes ist demjenigen in § 10 für einfache Zahlenfolgen geführten ganz ähnlich.

Über Doppelfolgen müssen wir uns hier darauf beschränken in den zwei folgenden Paragraphen die ersten Untersuchungen von Pringsheim[1]) beinahe wortgetreu darzustellen; wir bemerken aber, daß dieser ausgezeichnete Forscher später seine Untersuchungen erheblich verallgemeinert hat[2]), und daß auch F. London[3]) hier etwas bedeutendes geleistet hat.

§ 27. Sätze über konvergente Doppelfolgen.

Wenn die Doppelfolge $(a_{p,q})$ konvergiert, so darf man doch keineswegs schließen, daß ihre Kolonnen- bzw. Zeilenfolgen auch konvergieren; man darf also gar nicht schließen, daß

$$\lim_{p=\infty} a_{p,q}, \quad \lim_{q=\infty} a_{p,q} \tag{1}$$

für endliche Werte von q bzw. p existieren.

Beispiel 1. Setzt man für p und q positiv ganz, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$

$$a_{p,q} = (-1)^{p+q}\left(\frac{1}{p^\alpha} + \frac{1}{q^\beta}\right),$$

so hat man offenbar

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = 0,$$

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 27, p. 104—112; 1897.
2) Mathematische Annalen Bd. 53, p. 289—321; 1900.
3) Ebenda, p. 322—370.

während man für $q = 1, 2, 3, \ldots$

$$\liminf_{p=\infty} a_{p,q} = -\frac{1}{q^\alpha}, \quad \limsup_{p=\infty} a_{p,q} = +\frac{1}{q^\alpha}$$

und für $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\liminf_{q=\infty} a_{p,q} = -\frac{1}{p^\alpha}, \quad \limsup_{q=\infty} a_{p,q} = +\frac{1}{p^\alpha}$$

erhält, so daß keiner der Grenzwerte (1) in diesem Falle existiert. Andrerseits hat man aber den Satz:

I. *Wenn die Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *entweder konvergiert oder eigentlich divergiert, und wenn man für* $q = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\liminf_{p=\infty} a_{p,q} = l_q, \quad \limsup_{p=\infty} a_{p,q} = L_q \tag{2}$$

setzt und für $p = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\liminf_{q=\infty} a_{p,q} = l'_q, \quad \limsup_{q=\infty} a_{p,q} = L'_q, \tag{3}$$

so hat man immer

$$\lim_{q=\infty} l_q = \lim_{q=\infty} L_q = \lim_{p=\infty} l'_p = \lim_{p=\infty} L'_p = \lim_{p=\infty,\, q=\infty} a_{p,q}. \tag{4}$$

Ist $(a_{p,q})$ erstens konvergent, so hat man mit den gewöhnlichen Bezeichnungen

$$|a_{p,q} - A| < \varepsilon, \quad p > P, \quad q \geqq Q,$$

woraus speziell für die Zahlen (2) hervorgeht:

$$|l_q - A| < \varepsilon, \quad q \geq Q, \quad |L_q - A| < \varepsilon,$$

d. h.

$$\lim_{q=\infty} l_q = \lim_{q=\infty} L_q = A.$$

Ist zweitens die Doppelfolge $(a_{p,q})$ mit einem bestimmten Vorzeichen divergent, so hat man entweder $a_{p,q} > G$ oder $a_{p,q} < -G$ für $p = P$, $q \geqq Q$, woraus für $q \geqq Q$ immer

$$l_q > G, \quad L_q > G \text{ bzw. } l_q < -G, \quad L_q < -G$$

folgt, und damit ist unser Satz bewiesen; denn dieselben Betrachtungen bleiben noch für l'_p und L'_p gültig.

Hat man speziell $l_q = L_q$ für $q > Q$ bzw. $l_p = L_p$ für $p \geqq P$, so ergibt sich wegen I:

II. *Ist* $\lim a_{p,q}$ *für* $p = \infty$, $q = \infty$ *und* $\lim a_{p,q}$ *für* $p = \infty$, $q > Q$ *bzw.* $\lim a_{p,q}$ *für* $q = \infty$, $p > P$ *endlich oder unendlich groß mit bestimmtem Vorzeichen, so hat man*

$$\lim_{q=\infty} \left(\lim_{p=\infty} a_{p,q}\right) = \lim_{p=\infty,\, q=\infty} a_{p,q} \text{ bzw. } \lim_{p=\infty} \left(\lim_{q=\infty} a_{p,q}\right) = \lim_{p=\infty,\, q=\infty} a_{p,q}. \tag{5}$$

Demnach ergibt sich, daß die Existenz (endlich oder unendlich groß mit bestimmtem Vorzeichen) von

$$\lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q},\quad \lim_{p=\infty} a_{p,q}(q > Q),\quad \lim_{q=\infty} a_{p,q}(p > P) \tag{6}$$

allemal diejenige von

$$\lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} a_{p,q}),\quad \lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} a_{p,q}) \tag{7}$$

und zugleich die Beziehung

$$\lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} a_{p,q}) = \lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} a_{p,q}) \tag{8}$$

mit sich zieht.

Hieraus folgt, daß $\lim a_{p,q}$ für $p=\infty$, $q=\infty$ nicht existieren kann, wenn die Grenzwerte (7) beide existieren und voneinander verschieden sind.

Beispiel 2. $a_{p,q} = \dfrac{p}{p+q}$, p und q positiv ganz; hier ist für jedes q bzw. für jedes p

$$\lim_{p=\infty} a_{p,q} = 1,\quad \lim_{q=\infty} a_{p,q} = 0,$$

woraus folgt:

$$\lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} a_{p,q}) = 1,\quad \lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} a_{p,q}) = 0.$$

Unsere Zahlenfolge kann daher weder konvergieren noch mit bestimmtem Vorzeichen divergieren, was auch leicht unmittelbar zu verifizieren ist.

Aus der Beziehung (8), welche ja die Existenz der beiden letzten Grenzwerte (6) implizite voraussetzt, ist es aber keineswegs gestattet auf die Existenz von $\lim a_{p,q}$ für $p=\infty$, $q=\infty$ zu schließen.

Beispiel 3. $a_{p,q} = \dfrac{1}{1+(p-q)^2}$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$

Hier hat man für jedes p bzw. für jedes q

$$\lim_{q=\infty} a_{p,q} = 0 \text{ bzw. } \lim_{p=\infty} a_{p,q} = 0,$$

und dennoch kann $\lim a_{p,q}$ für $p=\infty$, $q=\infty$ nicht existieren, weil $p-q$ ganz und gar unbestimmt wird; man hat aber für jedes p und q

$$0 \leq a_{p,q} \leq 1.$$

Beispiel 4. $a_{p,q} = \left(\dfrac{2}{1+(p-q)^2}\right)^{p+1}$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$

Hier ist auch für jedes p bzw. für jedes q

$$\lim_{q=\infty} a_{p,q} = 0 \text{ bzw. } \lim_{p=\infty} a_{p,q} = 0,$$

und dennoch ist

$$a_{p,p} = 2^{p+1}.$$

60. Es sind für die beiden Doppelfolgen

$$a_{p,q} = \frac{pq}{p^2+q^2}, \qquad a_{p,q} = \frac{p^2q^2}{p^3+q^3}$$

die verschiedenen oben betrachteten Grenzwerte zu untersuchen.

§ 28. Monotone Doppelfolgen.

Die Doppelfolge $(a_{p,q})$ heißt *monoton* und zwar wachsend oder abnehmend, je nachdem für sämtliche ganze nicht negative Zahlen r und s immer

$$(1) \qquad a_{p+r,q+s} - a_{p,q} \geqq 0 \text{ bzw. } a_{p+r,q+s} - a_{p,q} \leqq 0$$

ist; für diese Doppelfolgen, die den gewöhnlichen einfachen monotonen Zahlenfolgen ganz ähnlich sind, gilt der Satz:

I. *Bleiben die absoluten Beträge $|a_{p,q}|$ stets unter einer endlichen Zahl g, so stellen die Ausdrücke*

$$(2) \qquad \lim_{p=\infty} a_{p,q}, \quad \lim_{q=\infty} a_{p,q}, \quad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q}$$

und zwar die beiden ersten für alle q bzw. für alle p durchaus bestimmte Zahlen vor, und es bestehen die Beziehungen:

$$(3) \qquad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = \lim_{p=\infty} \left(\lim_{q=\infty} a_{p,q}\right) = \lim_{q=\infty} \left(\lim_{p=\infty} a_{p,q}\right).$$

Es sei erstens $(a_{p,q})$ wachsend, dann erhält man aus (1) insbesondere, für alle r

$$a_{p+r,q} - a_{p,q} \geqq 0, \quad a_{p,q+r} - a_{p,q} \geqq 0;$$

d. h. die Kolonnen- und Zeilenfolgen der Doppelfolge $(a_{p,q})$ bilden monoton wachsende einfache Zahlenfolgen, und die Existenz der zwei ersten Grenzwerte in (2) ist eine unmittelbare Folge des Satzes § 11, I.

Wäre nun der dritte Grenzwert (2) nicht endlich und bestimmt, so müßte, wie groß auch p und q angenommen werden, zu dem Gliede $a_{p,q}$ stets ein Glied $a_{p+r_1,q+s_1}$ existieren, so daß

$$a_{p+r_1,q+s_1} - a_{p+q} \geqq a$$

wird, wo a eine vorgegebene, möglicherweise sehr kleine, aber von Null verschiedene positive Größe bezeichnet; ganz wie in § 11 zeigt man dann, daß diese Annahme mit der Voraussetzung $|a_{p,q}| < g$ im Widerspruch stehe.

Der dritte Grenzwert in (2) muß demnach auch endlich und bestimmt sein. Wäre nun zweitens $(a_{p,q})$ monoton abnehmend, so ist die Doppelfolge $(-a_{p,q})$ monoton wachsend, und damit ist unser Satz wegen § 27, I vollständig bewiesen.

Spezieller ergibt sich:

II. *Ist die Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *monoton, so zieht jede einzelne der drei Gleichungen*

$$(4)\qquad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = A, \quad \lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} a_{p,q}) = A, \quad \lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} a_{p,q}) = A$$

die beiden anderen nach sich, jedenfalls wenn A *endlich ist.*

Aus jeder dieser drei Gleichungen erhalten wir in der Tat für jedes p und q

$$a_{0,0} \leqq a_{p,q} \leqq A \text{ oder } a_{0,0} \geqq a_{p,q} \geqq A,$$

je nachdem $(a_{p,q})$ wachsend oder abnehmend ist; in beiden Fällen müssen also sämtliche absoluten Beträge $|a_{p,q}|$ unter einer endlichen Zahl bleiben, und II. ist somit eine unmittelbare Folge von I.

Weiter hat man den Satz:

III. *Ist die Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *monoton, und konvergiert ihre Diagonalfolge mit dem Grenzwerte* A*, so ist die Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *selbst konvergent mit demselben Grenzwerte* A*; es ist also immer*

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty} a_{n,n} = \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = A.$$

Wir können uns offenbar auch hier auf monoton wachsende Doppelfolgen beschränken, bedeutet n dann die größte der Zahlen p und q, so hat man stets:

$$a_{p,q} < a_{n,n} < A,$$

und III. ist eine unmittelbare Folge von I.

Bleiben die absoluten Beträge $|a_{p,q}|$ der Elemente einer monotonen Doppelfolge nicht sämtlich unter einer festen Grenze, gibt es also zu jeder noch so großen positiven Zahl G Zahlenpaare (p, q), für welche $|a_{p,q}| > G$ wird, so können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

1. Die Doppelfolge $(a_{p,q})$ ist wachsend, dann müssen die $a_{p,q}$ für hinlänglich große p und q sämtlich positiv sein, so daß also $a_{p,q} > G$ wird, d. h.

$$(6)\qquad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} a_{p,q} = +\infty.$$

Wegen II. haben wir dann auch

$$\lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} a_{p,q}) = +\infty, \quad \lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} a_{p,q}) = +\infty.$$

2. Die Doppelfolge $(a_{p,q})$ ist abnehmend, dann ist die Folge $(-a_{p,q})$ wachsend, und somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

IV. *Ist die Doppelfolge* $(a_{p,q})$ *monoton, so zieht jede einzelne der Gleichungen* (4) *die beiden anderen nach sich, auch wenn* A *die Bedeutung* $+\infty$ *oder* $-\infty$ *hat.*

§ 29. Analogon der Sätze von Cauchy und Jensen.

Pringsheim hat ein Analogon des Cauchyschen Grenzsatzes § 19, II gegeben; es liegt auf der Hand, daß wir durch das Jensensche Verfahren diesen Pringsheimschen Satz wie folgend verallgemeinern können:

I. *Bleiben die absoluten Beträge* $\varphi_{p,q}$ *der Elemente der Doppelfolge* $(\varphi_{p,q})$ *stets unter einer gewissen endlichen Größe* g, *während die Doppelfolge* $(\varphi_{p,q})$ *mit dem Grenzwerte* Φ *konvergiert, und die unendliche Zahlenfolge*

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots \tag{1}$$

außer den in § 19, I *angegebenen Bedingungen noch die untenstehende Bedingung* (4) *befriedigt, so hat man*

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \frac{a_1\varphi_{0,n} + (a_2 - a_1)\varphi_{1,n-1} + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\varphi_{n,0}}{a_{n+1}}. \tag{2}$$

Setzen wir nämlich für alle p und q

$$\varphi_{p,q} = \Phi - \varrho_{p,q},$$

so ist die Doppelfolge $(\varrho_{p,q})$ mit dem Grenzwerte 0 konvergent, während die absoluten Beträge $|\varrho_{p,q}|$ für alle Zahlenpaare (p,q) unter einer gewissen endlichen Größe bleiben, und anstatt der Gleichung (2) haben wir die folgende

$$0 = \lim_{n=\infty} \frac{a_1\varrho_{0,n} + (a_2 - a_1)\varrho_{1,n-1} + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\varrho_{n,0}}{a_{n+1}} \tag{3}$$

zu beweisen.

Teilen wir nun für jedes n die Summe rechter Hand in (3) in die drei anderen

$$\alpha_n = \frac{a_1\varrho_{0,n} + (a_2 - a_1)\varrho_{1,n-1} + \cdots + (a_{p+1} - a_p)\varrho_{p,n-p}}{a_{n+1}}$$

$$\beta_n = \frac{(a_{p+2} - a_{p+1})\varrho_{p+1,n-p-1} + \cdots + (a_{n-q+1} - a_{n-q})\varrho_{n-q,q}}{a_{n+1}}$$

$$\gamma_n = \frac{(a_{n-q+2} - a_{n-q+1})\varrho_{n-q+1,q-1} + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\varrho_{n,0}}{a_{n+1}}$$

so haben wir offenbar den anderen Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)$$

zu bestimmen.

Bezeichnen demnach

ϱ'_n obere Grenze der Zahlen $|\varrho_{0,n}|, |\varrho_{1,n-1}|, \cdots, |\varrho_{p,n-p}|$

ϱ''_n „ „ „ „ $|\varrho_{p+1,n-p-1}|, |\varrho_{p+2,n-p-2}|, \cdots, |\varrho_{n-q,q}|$

ϱ'''_n „ „ „ „ $|\varrho_{n-q+1,q-1}|, |\varrho_{n-q+2,q-2}|, \cdots, |\varrho_{n,0}|$,

so hat man ganz in derselben Weise wie in § 19:

$$|\alpha_n|<\varrho'_n\cdot\frac{BA_{p+1}}{A_{n+1}},\quad |\beta_n|<\varrho''_nB\cdot\frac{A_{n-q+1}-A_{p+1}}{A_{n+1}}<\varrho''_n\cdot B,$$

$$|\gamma_n|<\varrho'''_nB\cdot\left(1-\frac{A_{n-q+1}}{A_{n+1}}\right).$$

Verfügt man daher wie in § 19 in solcher Weise über p, daß $A^2_{p+1}\leqq A_{n+1}<A^2_{p+2}$ während q mit n unendlich groß werden soll, so hat man für $n\geqq N$

$$|\alpha_n|<\frac{B\varrho'_n}{A_{p+1}}<\frac{\varepsilon}{3},\quad |\beta_n<\frac{\varepsilon}{3},$$

denn in $|\alpha_n|$ ist $B\varrho'_n$ stets endlich, in $|\beta_n|$ haben sämtliche Zahlen $\varrho_{a,b}$ den Grenzwert Null; weiter soll die Zahlenfolge (1) so beschaffen sein, daß für jedes n ein solches q existiert, daß

$$(4)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{A_{n-q+1}}{A_{n+1}}=1,\qquad n-q=\infty,\qquad q=\infty,$$

wird; es ist dann auch für $n\geqq N$ immer $|\gamma_n|<\varepsilon:3$, und damit ist unser Satz bewiesen.

Setzt man $a_n=n$, so entfließt der Satz von Pringsheim[1]); wir machen ausdrücklich auf das elegante Beweisverfahren Pringsheims aufmerksam; man vergleiche z. B. den von Borel[2]) gegebenen Beweis.

Aus I. findet man noch den folgenden Satz:

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 27, p. 123; 1898.

2) Leçons sur les séries divergentes, p. 88—90. Paris 1901.

II. *Sind die beiden Zahlenfolgen*

$$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n \cdots, \quad \psi_0 \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n$$

Fundamentalreihen mit den Grenzwerten Φ *und* Ψ, *so hat man mit der Zahlenfolge* (1) *den Grenzwert*

$$(5) \quad \Phi\Psi = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 \varphi_0 \psi_n + (a_2 - a_1)\varphi_1 \psi_{n-1} + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\varphi_n \psi_0}{a_{n+1}}.$$

Man hat in der Tat nur in I. allgemein $\varphi_{p,n-p} = \varphi_p \psi_{n-p}$ einzuführen; setzt man in II. $a_n = n$, so entfließt der Satz von Cesàro[1]); man vergleiche § 43.

1) Darboux Bulletin (2) Bd. 14, p. 114—120; 1890.

ZWEITER TEIL.

REIHEN MIT KONSTANTEN GLIEDERN.

Kapitel VII.

Das Verhalten unendlicher Reihen.

§ 30. Konvergenz, Divergenz und Oszillation.

Aus der unendlichen Zahlenfolge

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots \tag{1}$$

bilden wir eine neue unendliche Zahlenfolge

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots, \tag{2}$$

indem allgemein für jedes n

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \tag{3}$$

gesetzt wird.

Ist in (3) n eine endliche Zahl, so heißt die Summe rechter Hand eine *endliche* Reihe; läßt man aber in dieser Formel den Stellenzeiger n über jede Grenze hinauswachsen, so entsteht die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n. \tag{4}$$

Wenn kein Mißverständnis daraus entstehen kann, schreiben wir auch häufig anstatt (4) kürzer Σu_n.

Die Zahlen u_n heißen die *Glieder*, die Summen s_n für endliche n *Partialsummen* der unendlichen Reihe (4).

Die unendliche Reihe (4) heißt *konvergent*, *divergent* oder *oszillierend*, je nachdem die unendliche Zahlenfolge (2) konvergiert, divergiert oder oszilliert.

Die Frage über das Verhalten einer vorgelegten unendlichen Reihe kann bisweilen dadurch beantwortet werden, daß man die entsprechende Partialsumme s_n in geschlossener Form darstellen kann.

Dies ist z. B. mit der geometrischen Reihe und mit der Reihe von E. Schröder[1]) und J. Tannery[2])

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 22, p. 184; 1876.

2) Brief nach Weierstraß. Monatsberichte der Berliner Akademie 21. Februar 1881. Weierstraß Werke Bd. II, p. 232.

$$(5) \qquad s_n = \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{2x^2}{1-x^4} - \frac{2x^4}{1-x^8} - \cdots - \frac{2x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

der Fall; aus (5) findet man in der Tat durch vollständige Induktion den geschlossenen Ausdruck:

$$(6) \qquad s_n = \frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} = 1 + \frac{2x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} = -1 + \frac{2x^{-2^{n+1}}}{x^{-2^{n+1}}-1}.$$

Solche Reihen, deren Summe in geschlossener Form dargestellt werden konnte, wurden in früheren Zeiten *„summierbar"* genannt; dieser Begriff ist aber wohl von dem modernen Begriffe der Summierbarkeit einer Reihe (man vergleiche § 34) zu unterscheiden.

Nach diesen Auseinandersetzungen haben wir nunmehr die folgenden allgemeinen Bemerkungen über das Verhalten einer unendlichen Reihe hervorzuheben:

1. *Konvergente Reihen.* Hier ist der Definition zufolge

$$(7) \qquad s = \lim_{n=\infty} s_n$$

eine endliche und bestimmte Zahl, die die *Summe* der unendlichen Reihe (4) genannt wird.

Beispiel 1. Die geometrische Reihe $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$ ist für $|q|<1$ konvergent mit der Summe

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Beispiel 2. Die Reihe von Schröder und Tannery ist für $|x| \neq 1$ konvergent und hat, je nachdem $|x|>1$ oder $|x|<1$ angenommen wird, die Summe

$$(8) \qquad s = +1, \quad s = -1,$$

wie dies deutlich aus der Formel (6) hervorgeht.

2. *Divergente Reihen.* Hier wächst $|s_n|$ mit n über jede Grenze hinaus.

Beispiel 3. Die geometrische Reihe für $|q|>1$ oder $q=1$.

Beispiel 4. Die harmonische Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

3. *Oszillierende Reihen.* Hier wird s_n für unbegrenzt wachsendes n ganz und gar *unbestimmt.*

Beispiel 5. Für $q=1$ aber $q \neq 1$ oszilliert die geometrische Reihe zwischen *endlichen* Grenzen, wie wir schon in § 22 gesehen haben.

Beispiel 6. Für $|x| = 1$ und $x \neq 1$ oszilliert die Reihe (6) zwischen *unendlichen* Grenzen; setzt man in der Tat

$$q = 2^n, \; x = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi},$$

so erhält man wegen (6)

$$s_n = \frac{1 + \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi} = i \cdot \frac{2\cos q\varphi \cdot e^{iq\varphi}}{2 \sin q\varphi \cdot e^{iq\varphi}} = i \cot (2^n \varphi).$$

Eine genaue Definition der Konvergenz einer unendlichen Reihe ist schon im J. 1811 von Fourier[1]) gegeben worden; dieser Mathematiker hat auch einen strengen Beweis[2]) der Konvergenz einer gewissen speziellen Reihe geliefert.

Wenden wir nunmehr das allgemeine Konvergenzprinzip auf die unendliche Zahlenfolge (2) an, so haben wir die Summe

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = R_{n,p} \tag{9}$$

zu untersuchen. Die Summe (9) wird gewöhnlich als das *Restglied* der unendlichen Reihe (4) bezeichnet.

Aus der Definition (9) des Restgliedes erhalten wir unmittelbar den Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe* (4) *besteht darin, daß es für eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe* ε *möglich ist, eine solche positive ganze Zahl* N *zu bestimmen, daß für* $n \geqq N$ *immer*

$$|R_{n,p}| < \varepsilon \tag{10}$$

wird, indem p *eine willkürliche positive ganze Zahl bedeutet.*

Setzt man in (10) speziell $p = 1$, so erhält man

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 \tag{11}$$

als eine *notwendige* aber keineswegs hinreichende Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe (4). Die harmonische Reihe, die ja divergiert, genügt in der Tat der Bedingung (11).

Sind die Glieder u_n der Reihe (4) *positiv*, so ist die Zahlenfolge (2) monoton wachsend; aus § 11 erhält man daher unmittelbar den Satz:

II. *Eine Reihe mit positiven Gliedern kann niemals oszillieren; sie muß also immer entweder konvergieren oder divergieren und zwar eigentlich.*

1) (1811) Mèmoires de l'Institut Bd. 4, p. 314—315; 1819—20 (1824) Œuvres Bd. I pp. 156, 221.

2) Mèm. de l'Institut Bd. 4, p. 274—279.

Sind die Glieder u_n der Reihe (4) *komplex*, und setzt man allgemein $u_n = u_n' + iu_n''$, so entfließt unmittelbar aus § 18 der Satz:

III. *Die Reihe mit komplexen Gliedern* $\Sigma(u_n' + iu_n'')$ *ist dann und nur dann konvergent, wenn die beiden Reihen mit reellen Gliedern* $\Sigma u_n'$ *und* $\Sigma u_n''$ *konvergieren, und es ist in diesem Falle*

$$(13) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}(u_n' + iu_n'') = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n' + i\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n''.$$

Beispiel 7. Aus (11) folgt unmittelbar, daß die Reihe

$$x + \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{3}\,x^3 + \cdots + \sqrt{n}\,x^n + \cdots$$

niemals für $|x| \geqq 1$ konvergieren kann; ist $|x| < 1$, so erhält man für das Restglied

$$(12)\ |R_{n,p}| \leqq \sqrt{n+1}\cdot|x|^{n+1} + \sqrt{n+2}\cdot|x|^{n+2} + \cdots + \sqrt{n+p}\cdot x|^{n+p};$$

bedeutet nun G die obere Grenze der Zahlen

$$\sqrt{n+q}\cdot|x|^{\frac{n+q}{2}},\ q = 1, 2, 3, \cdots, p,$$

so ist wegen § 24, (16) G sicher endlich und man erhält aus (12)

$$|R_{n,p}| < G\cdot|x|^{\frac{n+1}{2}}\left(1 + |x^{\frac{1}{2}}| + |x^{\frac{2}{2}} + \cdots |x^{\frac{p}{2}}\right) < \frac{G\cdot x|^{\frac{n+1}{2}}}{1 - |x^{\frac{1}{2}}|};$$

unsere Reihe ist somit für $|x| < 1$ konvergent.

Eine strenge Definition der Konvergenz einer Reihe ist beinahe gleichzeitig auch von Cauchy[1]) und Abel[2]) ausgesprochen worden.

---

61. $$\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{2^s}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^s}\right) = \frac{1}{2^n}\cdot\cot\left(\frac{x}{2^n}\right) - \cot x.$$

62. $$\frac{2}{\sin x} + \sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\cdot x\right)}{\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}.$$

63. Wenn *eine* der beiden Reihen Σu_n und $\Sigma(u_n - u_{n+1})$ konvergiert, so hat man zu untersuchen, inwieweit die andere auch konvergiert.

64. Satz von Cauchy[3]): Sind die Glieder der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots$$

---

1) Analyse algébrique, p. 125; 1821.

2) Journal für Mathematik Bd. I; 1826. Œuvres Bd. I, p. 221; hier findet man auch die Bedingung (10).

3) Analyse algébrique, p. 135; 1821.

positiv und monoton abnehmend, so ist diese Reihe und die folgende

$$u_1 + pu_p + p^2 u_{p^2} + \cdots + p^n u_{p^n} + \cdots,$$

wo p eine bestimmte positive ganze Zahl bedeutet, gleichzeitig konvergent oder divergent.

65. Mit Cauchy[1]) soll man den vorhergehenden Satz (am einfachsten für $p = 2$) auf die Reihe

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots\cdots;\ \alpha > 0$$

anwenden.

66. Wenn die n_p sämtlich positiv sind, und für jedes p immer $0 < a_p < a_{p+1}$ ist, so konvergiert die Reihe

$$a_1^{-n_1} + a_2^{-n_2} + a_3^{-n_3} + \cdots\cdots + a_p^{-n_p} + \cdots\cdots$$

immer, wenn lim inf $n_p > 1$ und lim inf $(a_{p+1} - a_p) > 0$ ist.

67. Mit denselben Voraussetzungen divergiert die Reihe in Aufgabe 66 immer, wenn lim. sup. $n_p < 1$ und lim sup $(a_{p+1} - a_p)$ endlich ist.

§ 31. Bedingte und unbedingte Konvergenz.

Wenn die aus den absoluten Beträgen der Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots \tag{1}$$

gebildete neue Reihe mit positiven Gliedern

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots\cdots \tag{2}$$

konvergiert, so muß die ursprüngliche Reihe (1) auch selbst konvergieren; man hat in der Tat für den absoluten Betrag ihres Restgliedes

$$|R_{n,p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|, \tag{3}$$

und die Summe rechter Hand in (3) ist eben das Restglied der konvergenten Reihe (2).

Wenn die Reihe (2) konvergiert, so heißt die ursprüngliche Reihe (1) *absolut konvergent.*

Reihen, deren Glieder von einem gewissen endlichen Stellenzeiger an sämtlich reell sind und dasselbe Zeichen haben, können daher nur absolut konvergieren.

Daß aber auch konvergente Reihen existieren, die nicht absolut konvergieren, ist leicht einzusehen; unter den einfachsten Reihen

1) Loc. cit. p. 137.

dieser Art ist wohl die von Brouncker[1]) eingeführte Reihe hervorzuheben:

$$\omega = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots; \tag{4}$$

daß diese Reihe wirklich konvergiert, liegt auf der Hand; denn man hat für ihr Restglied

$$(-1)^n R_{n,p} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} < \frac{1}{n+1};$$

da aber die aus den absoluten Beträgen der Glieder in ω gebildete Reihe die harmonische Reihe ist, so liegt auf der Hand, daß (4) nicht absolut konvergieren kann.

Bei konvergenten Reihen stellt sich ganz natürlich die Frage ein, ob man die Reihenglieder in willkürlicher Weise umordnen darf ohne die Summe der Reihe zu ändern; wie wir bald zu zeigen haben, bleibt die allgemeine Antwort dieser Frage eine *verneinende*.

Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn ihre Summe von der Anordnung der Reihenfolge ihrer Glieder unabhängig ist.

Mit diesen Definitionen ist es nunmehr sehr leicht, den folgenden von Dirichlet[2]) herrührenden Satz zu beweisen:

I. *Eine absolut konvergente Reihe ist auch immer unbedingt konvergent.*

Ist die Reihe (1) absolut konvergent, und setzt man

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$
$$s'_m = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_m,$$

wo die u'_q dieselben Glieder wie die u_p sind, aber nur in willkürlicher anderer Weise geordnet, so hat man offenbar

$$s_m - s'_m = u_{r_1} + u_{r_2} + \cdots + u_{r_s} - (u'_{p_1} + u'_{p_2} + \cdots + u'_{p_t}), \tag{5}$$

wo die u_r diejenigen Glieder in s_n, die nicht auch in s'_m, die u'_p diejenigen Glieder in s'_m, die nicht auch in s_n vorkommen, bezeichnen; die Stellenzeiger r sind demnach sämtlich *kleiner* als $n+1$, die p dagegen sämtlich *größer* als n.

Es seien nun $(n-q)$ die *kleinste* der Zahlen r, $(n+s)$ die *größte* der Zahlen p; dann ergibt sich wegen (5)

$$|s_n - s'_m| \leqq \sum_{k=0}^{k=q+s} |u_{n-q+k}|,$$

1) Philosophical Transactions 13. April 1668.

2) Abhandlungen der Berliner Akademie 1837. Werke Bd. I, p. 318.

da nun sowohl q als s mit n über jede Grenze hinaus wachsen müssen[1]), und da die Reihe (2) konvergiert, so muß es möglich sein, zwei positive ganze Zahlen N und M zu bestimmen, so daß für $n \geqq N$, $m \geqq M$ immer

$$|s_n - s'_m| < \varepsilon$$

wird, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der Satz von Dirichlet gibt also eine *hinreichende* Bedingung für die Anwendung des kommutativen Prinzips der Addition auf eine Summe mit einer unbegrenzten Anzahl von Addenden; daß aber diese Bedingung auch eine notwendige ist, wenn die Glieder unserer Reihe in willkürlicher Weise angeordnet werden sollen, geht deutlich aus dem folgenden von Riemann[2]) herrührenden Satz hervor:

II. *Wenn die Reihe* (1) *wohl konvergiert, aber nicht absolut, so kann man unbegrenzt oft ihre Glieder so anordnen, daß wenigstens entweder die reelle oder die imaginäre Komponente der so erhaltenen Summe einer beliebigen vorgegebenen Größe gleich wird.*

Setzt man allgemein $u_n = u'_n + iu''_n$, so kann die nicht absolute Konvergenz der Reihe (1) davon herrühren, daß nur eine oder keine der Reihen mit positiven Gliedern $\Sigma|u'_n|$ und $\Sigma|u''_n|$ konvergiert.

Da wir im allgemeinen nur über eine der Komponenten der Reihensumme beliebig verfügen können, so beschränken wir uns auf eine Reihe mit reellen Gliedern, diese Glieder können somit nicht sämtlich, von einem gewissen Stellenzeiger an, dasselbe Zeichen haben; denn in diesem Falle müßte unsere konvergente Reihe absolut konvergieren.

Bezeichnen α_p die positiven, $-\beta_q$ die negativen Glieder unserer Reihe, so müssen die beiden Reihen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \tag{6}$$

$$-\beta_0 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \cdots \tag{7}$$

divergieren, denn wären sie beide konvergent, so müßte unsere vorgelegte Reihe absolut konvergieren; wäre aber eine der Reihen (6) und (7) konvergent, die andere divergent, so müßte die vorgelegte Reihe divergieren. Andererseits hat man aber wegen der Konvergenz der vorgelegten Reihe

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0. \tag{8}$$

1) Die Umordnung der Reihenglieder ist unter allen Umständen in solcher Weise vorzunehmen, daß, wenn in der Gleichung $u_n = u'_m$ n eine bestimmte Zahl bedeutet, m dieselbe Eigenschaft hat und umgekehrt.

2) Göttinger Abhandlungen Bd. 13, p. 13, 1867. Werke, p. 235 (2. Ausg.).

Es sei nun ω eine willkürlich vorgegebene, z. B. positive Größe, welche die Summe unserer Reihe nach Vertauschung der Glieder darstellen soll; dann bezeichnen wir durch

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \cdots,\ \tau_n,\ \cdots$$

eine Folge mit positiven Gliedern, die den Grenzwert 0 hat.

Weiter nehmen wir aus der Reihe (6) in willkürlicher Weise m_1+1 Glieder aus, so daß

$$(A_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{m_1} \leqq \omega + \tau_1 \tag{9}$$

wird, und dann aus (7) r_1+1 Glieder, so daß

$$-(B_1) = -\beta'_1 - \beta'_2 - \cdots - \beta'_{r_1} \leqq -\tau_1 - \tau_2$$

wird, dann hat man offenbar

$$(A_1)-(B_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m - \beta'_0 - \beta'_1 - \cdots - \beta'_{r_1} \leqq \omega - \tau_2. \tag{10}$$

Aus der Reihe (6) nimmt man nun wieder die Summe

$$(A_2) = \alpha'_{m_1+1} + \alpha'_{m_1+2} + \cdots + \alpha'_{m_2} \leqq \tau_2 + \tau_3$$

usw.

Wenn nun die dadurch gebildete Reihensumme

$$(A_1) - (B_1) + (A_2) - (B_2) + \cdots + (A_m) \leqq \omega + \tau_{2m-1}, \tag{11}$$

vielleicht außer anderen Gliedern, sicher die p ersten Glieder von (6) und die q ersten Glieder von (7) sämtlich enthält, und man dafür Sorge trägt, daß sowohl p und q mit m über jede Grenze hinauswachsen, so hat die Summe unserer so umgeformten Reihe offenbar den Wert ω.

Der Satz II zeigt unmittelbar, daß I umgekehrt werden darf; also:

III. *Eine unbedingt konvergente Reihe muß auch absolut konvergieren.*

Die beiden Begriffe *absolute* und *unbedingte* Konvergenz sind somit identisch; die nicht absolut konvergenten Reihen heißen auch *bedingt* konvergent.

Beispiel 1. Aus der Brounckerschen Reihe (4) bilden wir eine neue, indem wir stets zwei positive und dann ein negatives Glied ausnehmen; für die Partialsumme der so erhaltenen Reihe ergibt sich dann

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{1}{4s-3} + \frac{1}{4s-1} - \frac{1}{2s}\right) = \sum_{s=1}^{s=2n}\frac{(-1)^{s-1}}{s} + \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{1}{2n+2s+1}. \tag{12}$$

Setzt man aber nun der Kürze halber

$$\alpha_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 2\cdot\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{2p},$$

so hat man offenbar

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n};$$

für die Partialsumme ω_n der Reihe (4) erhält man daher den Ausdruck

$$\omega_{2n} = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n-1}}{p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \tag{13}$$

woraus hervorgeht:

$$\omega_{4n} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{1}{2n+2s+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{1}{n+s+1}$$

oder auch:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{1}{2n+2s+1} = \omega_{4n} - \frac{1}{2} \cdot \omega_{2n} +,$$

und somit ergibt sich wegen (12):

$$\sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{1}{4s-3} + \frac{1}{4s-1} - \frac{1}{2s} \right) = \frac{1}{2}\, \omega_{2n} + \omega_{4n},$$

woraus, indem ω die Reihensumme (4) bezeichnet, folgt:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2} \cdot \omega. \tag{14}$$

Beispiel 2. Die Glieder der Reihe

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{i}{1}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2^2}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{2^3}\right) + \cdots$$

können so umgeordnet werden, daß die reelle Komponente der so erhaltenen Summe einer willkürlichen Zahl gleich wird; die imaginäre Komponente dieser Summe behält aber ungeändert ihren Wert 2.

Die erste Unterscheidung der beiden Begriffe bedingte und unbedingte Konvergenz rührt von Cauchy[1]) her; Ohm[2]) und Schlömilch[3]) haben speziellere, Pringsheim[4]) allgemeinere Untersuchungen über Wertänderungen der Summen bedingt konvergenter Reihen angestellt. Borel[5]) hat Gliedervertauschungen, bei denen

1) Analyse algébrique 1821 (bei Multiplikation von Reihen).
2) De nonnullis seriebus summandis. Antrittsprogramm Berlin 1839.
3) Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 18, p. 520; 1873.
4) Mathematische Annalen Bd. 22, p. 455—503; 1882.
5) Darboux Bulletin (2) Bd. 14, p. 97; 1890.

die Summe einer bedingt konvergenten Reihe ungeändert bleibt, untersucht.

---

68. Wenn man aus den Gliedern einer bedingt konvergenten Reihe eine willkürliche unendliche Anzahl ausnimmt, so erhält man wieder eine unbedingt konvergente Reihe.
69. Wenn die Reihe Σu_n unbedingt konvergiert, so hat $\Sigma u_n^{p_n}$, wo die Exponenten p_n sämtlich positive ganze Zahlen sind, dieselbe Eigenschaft.
70. Bildet man aus einer unbedingt konvergenten Reihe eine andere, indem man ihre Glieder in willkürlicher Weise, doch niemals unendlich oft, wiederholt, so erhält man eine neue unbedingt konvergente Reihe.
71. Wenn die obere Grenze von $|k_n|$ endlich ist, und Σu_n unbedingt konvergiert, so hat die neue Reihe $\Sigma k_n u_n$ dieselbe Eigenschaft.
72. Wenn die Reihe Σu_n unbedingt, Σv_n aber nur konvergiert, so hat man den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}(u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \cdots + u_p v_{n-p} + \cdots u_1 v_{n-1} + u_0 v_n) = 0.$$

73. Ist die Zahlenfolge mit positiven Elementen

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

eine beliebige Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte 0, so daß die Reihe Σa_n divergiert, so kann man jedoch aus (1) unendlich viele unendliche Zahlenfolgen

$$a_{\lambda_0},\ a_{\lambda_1},\ a_{\lambda_2},\ \cdots,\ a_{\lambda_n},\ \cdots$$

auswählen, so daß die Reihe Σa_{λ_n} konvergiert. Beispiel $a_n = (n+1)^{-1}$, $a_{\lambda_n} = \lambda_n^{-p}$, $p \geqq 2$, $\lambda_n > 0$.
74. Divergiert die Reihe mit positiven Gliedern Σd_n^{-1}, während die Zahlenfolge mit positiven Elementen $\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ einen endlichen lim sup hat, so divergiert auch die Reihe $\Sigma(d_n + \lambda_n)^{-1}$.
75. Es ist die Reihensumme

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

zu bestimmen.
76. Wenn keine einzige der Zahlen u_n den Wert -1 hat, so müssen die beiden Reihen mit positiven Gliedern

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} |\log(1+u_n)|, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n|$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren.

§ 32. Sätze über absolut konvergente Reihen.

Aus den Gliedern der unendlichen Reihe

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

kann man unbegrenzt oft unendlich viele, endliche oder unendliche, Reihen bilden:

(A_0) $$a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} + \cdots + a_{0,n} + \cdots$$

(A_1) $$a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} + \cdots$$

(A_2) $$a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} + \cdots$$

. . . . . .

(A_n) $$a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n} + \cdots$$

. . . . . .

so daß diese Reihen zusammen jedes einzelne Glied der Reihe (1) ein und nur einmal enthalten, und zwar so, daß die Gleichheit $u_n = a_{p,q}$ für ein endliches n nur dann stattfindet, wenn sowohl p als q endlich sind, und umgekehrt.

Eine solche Einteilung der Reihenglieder u_n kann z. B. erhalten werden, indem man in (A_0) sämtliche Glieder u_n, für welche n durch 2 teilbar ist und keine andere vereinigt; in (A_1) nimmt man dann diejenigen der zurückgebliebenen u_n, deren Stellenzeiger durch 3 teilbar sind, in (A_2) diejenigen der noch zurückgebliebenen, deren Stellenzeiger durch 5 teilbar sind usw.

Wenn auch die Reihe (1) konvergiert, so wissen wir doch im allgemeinen gar nichts über das Verhalten der einzelnen Reihen (A_n). Ist z. B. (1) die Brounckersche Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

und bildet man die Reihen (A_n) nach dem soeben angegebenen Verfahren, so *divergieren* sämtliche Reihen (A_n).

Andrerseits gilt aber der folgende Satz:

I. *Ist die Reihe* (1) *absolut konvergent mit der Summe* s, *so konvergiert nicht bloß jede einzelne Reihe* (A_n) *absolut, sondern bezeichnen* $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ *die Summen dieser Reihen, so hat man*

(2) $$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots.$$

Setzt man weiter für jedes n

$$d_n = a_{0,n} + a_{1,n-1} + a_{2,n-2} + \cdots + a_{n,0}, \tag{3}$$

so ist ebenfalls

$$s = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n + \cdots. \tag{4}$$

Bezeichnet $R_n^{(p)}$ das Restglied der Reihe (A_p), also

$$R_n^{(p)} = a_{p,n+1} + a_{p,n+2} + \cdots,$$

so hat man

$$|R_n^{(p)}| \leqq u_m + u_{m+1} + \cdots, \tag{5}$$

wo u_m dasjenige Reihenglied aus (1) mit dem *kleinsten* Stellenzeiger, welches in $R_n^{(p)}$ vorkommt, bezeichnet. Da die Summe rechter Hand in (5) aber das Restglied einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern $\Sigma |u_n|$ darstellt, liegt die absolute Konvergenz der Reihe (A_p) auf der Hand.

Betrachten wir nunmehr die Summe

$$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n,$$

und ist m der größte Stellenzeiger, für welchen $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m$ sämtlich in S_n vorkommen, so hat man sicher

$$s - S_n \leqq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots$$

woraus die Gleichheit

$$s = \lim_{n=\infty} S_n$$

deutlich hervorgeht.

Weiter setzen wir

$$d_n' = \sum_{p=0}^{p=n} a_{p,n-p}, \quad s_q' = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_{q,r}, \quad s' = \sum_{n=0}^{p=\infty} u_n,$$

alsdann ergibt sich

$$d_0' + d_1' + d_2' + \cdots + d_n' < s_0' + s_1' + s_2' + \cdots + s_n' \leqq s',$$

woraus die absolute Konvergenz der Reihe (4) deutlich hervorgeht.

Setzt man endlich

$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n + r_n,$$

so ist r_n eine unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_{p,n} + a_{p-1,n-1} + \cdots + a_{0,p+n}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots;$$

es ist also sicher

$$|r_n| < d_{n+1}' + d_{n+2}' + d_{n+3}' + \cdots,$$

woraus die Formel (4) unmittelbar hervorgeht, weil die Reihe mit positiven Gliedern $\Sigma d_n'$ konvergiert.

§ 33. Addition und Subtraktion unendlicher Reihen.

Sind s_n und t_n Partialsummen der konvergenten Reihen

$$(1) \qquad \begin{cases} s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \\ t = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \end{cases},$$

und bezeichnen

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_m, \cdots$$
$$q_1, q_2, q_3, \cdots, q_m, \cdots$$

zwei unendliche Folgen beständig wachsender positiver ganzer Zahlen, so stellt die Zahlenfolge

$$(2) \qquad s_{p_1} \pm t_{q_1},\ s_{p_2} \pm t_{q_2},\ \cdots,\ s_{p_m} \pm t_{q_m},\ \cdots$$

sicher Fundamentalreihen mit dem Grenzwerte $s \pm t$ dar.

Die Frage über die Darstellung als unendliche Reihe des Grenzwertes der Fundamentalreihe (2) wird unmittelbar durch den folgenden Satz beantwortet:

I. *Wenn die Reihen Σu_n und Σv_n beide konvergieren, so haben die neuen Reihen $\Sigma(u_n \pm v_n)$ dieselbe Eigenschaft, und es ist immer*

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \pm \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n .$$

Die Summe einer endlichen Anzahl absolut konvergenter Reihen ist wieder eine absolut konvergente Reihe. Wenn aber nur eine einzige der zu summierenden Reihen bedingt, die übrigen unbedingt konvergieren, so wird die Summe dieser Reihen auch nur *bedingt* konvergent.

Daß andrerseits die Summe mehrerer bedingt konvergenter Reihen unbedingt konvergieren kann, geht aus dem Beispiele

$$\sum u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$
$$\sum v_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^5} + \cdots$$

deutlich hervor; denn die beiden Summanden konvergieren nur bedingt, ihre Summe aber unbedingt.

77. Wenn $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma b_n \sin nx$ beide konvergieren, so sind die folgenden vier Reihen $\Sigma a_n \cos(nx \pm \alpha)$, $\Sigma a_n \sin(nx \pm \alpha)$ auch konvergent, wenn α endlich ist.

§ 34. Sogenannte Summierbarkeit von Reihen.

Als eine direkte Verallgemeinerung des Begriffes *Konvergenz* einer unendlichen Reihe hat man in der neuesten Zeit den Begriff *Summierbarkeit* einer Reihe eingeführt.

Setzt man der Kürze halber für positive ganze p

$$s_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p, \tag{1}$$

und ist der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n}{n}\right) = S \tag{2}$$

endlich und bestimmt, so heißt die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

summierbar mit der Mittelsumme S.

Daß nun wirklich die Summierbarkeit als eine direkte Verallgemeinerung der Konvergenz anzusehen ist, geht aus dem Satze § 19, I deutlich hervor. Konvergiert nämlich die Reihe (3) mit der Summe s, so ist

$$s = \lim_{n=\infty} s_n \tag{4}$$

endlich und bestimmt; setzt man daher in der Formel § 19, (4) $a_n = n$, so erhält man wegen (2)

$$S = s \tag{5}$$

oder als Lehrsatz:

I. *Eine konvergente Reihe ist auch summierbar, und ihre Mittelsumme ist ihrer Summe im gewöhnlichen Sinne gleich.*

Daß aber andrerseits die Summierbarkeit viel allgemeiner ist als die Konvergenz, liegt auf der Hand; die oszillierende Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots \tag{6}$$

ist z. B. summierbar mit der Mittelsumme $\frac{1}{2}$.

Weiter gilt der Satz:

II. *Eine eigentlich divergente Reihe kann niemals mit einer endlichen Mittelsumme summierbar sein.*

Divergiert die Reihe (3) zu $+\infty$, so müssen die Partialsummen (1) von einem gewissen Stellenzeiger an sämtlich positiv sein; bezeichnet weiter G eine vorgegebene willkürlich große positive Zahl, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl p zu bestimmen, daß für $n \geqq p$ immer $s_n > G$ wird. Bezeichnet dann A_n den in (2) vorkommenden Bruch, so hat man identisch

$$A_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_p}{n} + \frac{s_{p+1} + s_{p+2} + \cdots + s_n}{n};$$

da nun G größer als die absoluten Beträge der negativen s_q angenommen werden darf, so hat man sicher für $n \geqq 4p$

$$A_n > -\frac{p}{n} \cdot G + \frac{n-p}{n} \cdot G = \frac{n-2p}{n} \cdot G \geqq \frac{1}{2} G. \tag{7}$$

Divergiert die Reihe (3) zu $-\infty$, so divergiert $\Sigma(-u_p)$ zu $+\infty$, und damit ist unser Satz bewiesen; denn in (7) bezeichnet p ja eine *feste* Zahl, wenn G angegeben ist.

Durch die Jensensche Formel § 19 (4) kann man unmittelbar den Begriff der Summierbarkeit verallgemeinern, z. B. wenn man die a_n sämtlich positiv wählt, so daß die Zahlenfolge

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

monoton wächst und divergiert.

Der Begriff der Summierbarkeit einer Reihe lag schon in den von Leibniz[1]), Lagrange[2]) und anderen über die Reihe (4) gemachten sehr unklaren Bemerkungen verborgen. Frobenius[3]) hat zum ersten Male den Begriff klar auseinander gesetzt, während Cesàro[4]) die ersten allgemeinen Anwendungen dieses Begriffes gegeben hat; Knopp[5]) hat soeben die Definition etwas modifiziert.

Die fundamentale funktionentheoretische Bedeutung der Summierbarkeit geht z. B. deutlich aus den Untersuchungen von Fejér[6]) hervor.

---

78. Wenn x kein Multiplum von 2π bezeichnet, so ist die Reihe

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cdots$$

summierbar mit der Mittelsumme $\frac{1}{2}$.

79. Man soll die Summierbarkeit der geometrischen Reihe

$$a + ae^{\frac{\pi i}{q}} + ae^{\frac{2\pi i}{q}} + ae^{\frac{3\pi i}{q}} + \cdots$$

für positive ganze q untersuchen.

80. Setzt man der Kürze halber

$$s'_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \cdots + nu_n,$$

---

1) Epistola ad Christ. Wolfium: Acta eruditorum Bd. 5, Supplem.

2) Mèm. de d'Institut Bd. 3 (Rapport sur le mém. de M. Callet).

3) Journal für Mathematik Bd. 89, p. 262—264; 1880.

4) Darboux Bulletin (2) Bd. 14, p. 114—120; 1890. Napoli Rendiconti 28. Oktober 1893.

5) Palermo Rendiconti Bd. 25; 1908.

6) Comptes rendus 3. Februar 1908.

so ist die Bedingung

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{s'_n}{n}\right)=0$$

notwendig für die Konvergenz der Reihe Σu_n.

81. Für die Summe

$$a_p=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}$$

hat man den Mittelwert

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=a_n-1.$$

82. Für die Summe

$$s_p=\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{p\log p}$$

hat man den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{s_2+s_3+s_4+\cdots+s_{n-1}}{n}-s_n\right)=0.$$

Kapitel VIII.

Konvergenz und Divergenz gewisser Reihen.

§ 35. Satz von Leibniz über alternierende Reihen.

Über Reihen mit alternierenden Gliedern hat Leibniz[1]) den folgenden Satz gegeben:

I. *Wenn die positiven Zahlen u_n monoton abnehmen und dem Grenzwerte 0 zustreben, so konvergiert die alternierende Reihe*

(1) $$u_0-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots.$$

Es ist in der Tat

$$\pm R_{n,p}=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}<u_{n+1}.$$

Beispiel 1. Bedeutet m eine positive ganze Zahl, so konvergieren die Reihen

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt[m]{p}},\qquad \sum_{p=2}^{p=\infty}\frac{(-1)^p}{\log p}$$

beide bedingt.

Es ist aber wohl zu beachten, daß die oben gegebene Bedingung für die Konvergenz der Reihe (1) zwar hinreichend, keineswegs aber notwendig ist.

---

1) Brief nach Johann Bernoulli, 10. Januar 1714. Werke (herausgegeben von Gerhardt) Bd. 3, II, p. 926.

Beispiel 2. Die Reihe

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$$

ist bedingt konvergent, obgleich die absoluten Beträge der Glieder nicht monoton abnehmen.

Beispiel 3. Die Reihe

$$s=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\cdots$$

ist für endliche x, die nicht negativ ganz sind, bedingt konvergent.

Ist $x>-1$ vorausgesetzt, so kann man direkt den Lehrsatz I anwenden; für $x<-1$ setze man $-p<x<-p+1$; dann werden die Nenner von $x+p$ an sämtlich positiv, und der Satz I ist dann wieder anwendbar. Ist endlich x komplex, $x=\alpha+i\beta$, so hat man

$$\frac{1}{x+n}=\frac{\alpha+n-i\beta}{(\alpha+n)^2+\beta^2},$$

und somit ergibt sich

$$s=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}(\alpha+p)}{(\alpha+p)^2+\beta^2}+i\beta\cdot\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^p}{(\alpha+p)^2+\beta^2}. \tag{2}$$

Die letzte Summe kann unmittelbar nach dem Satze I behandelt werden; denn wenn p so groß gewählt ist, daß $\alpha+p>0$ wird, so werden die absoluten Beträge der Glieder abnehmend, dasselbe gilt auch für die erste Summe, wenn nur

$$\frac{\alpha+p}{(\alpha+p)^2+\beta^2}>\frac{\alpha+p+1}{(\alpha+p+1)^2+\beta^2} \tag{3}$$

gemacht werden kann. Da die beiden Nenner positiv sind, erhält man aus (3) $(\alpha+p)(\alpha+p+1)>\beta^2$, und die Ungleichung (3) ist demnach sicher für $p+\alpha>|\beta|$ immer richtig.

83. Man soll die Divergenz der Reihe

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

nachweisen.

84. Für n ganz und größer als 1 divergiert die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{5}}+\frac{1}{\sqrt[n]{7}}-\frac{1}{\sqrt[n]{4}}+\cdots$$

85. Man soll die Divergenz der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}+\cdots$$

nachweisen.

86. Setzt man für positive α

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots,$$

so ist zu beweisen, daß σ_α mit α monoton wächst und für $\alpha = \infty$ den Grenzwert 1 hat.

§ 36. Methode der Reihenvergleichung.

Die Frage über Konvergenz und Divergenz einer vorgelegten Reihe kann bisweilen dadurch beantwortet werden, daß man die Reihe mit einer bekannten vergleicht, und zwar unter Zuhilfenahme der beiden folgenden Sätze:

I. *Wenn die Glieder der beiden Reihen Σu_n und Σv_n von einem gewissen n an sämtlich positiv sind, und zwar so, daß die u_n mit wachsendem n ihren Quotienten nach nicht langsamer abnehmen, speziell nicht größer sind, als die v_n, so konvergiert die Reihe Σu_n sicher, wenn dies mit Σv_n der Fall ist.*

Setzt man in der Tat

$$u_n = a_n v_n, \quad u_{n+1} = a_{n+1} v_{n+1}, \cdots,$$

so ergibt die Ungleichung

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

daß $a_{n+1} \leqq a_n$ sein muß, woraus

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + v_{n+p} \leqq a_n \cdot (v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots v_{n+p})$$

hervorgeht, und damit ist unser Satz bewiesen.

Beispiel 1. Da

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s(s+1)} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = 1$$

ist, so konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.$$

Der Satz I kann noch dahin verallgemeinert werden, daß die Reihe Σu_n sicher *unbedingt* konvergiert, falls die $|u_n|$ mit wachsendem n ihrem Quotienten nach nicht langsamer abnehmen als die positiven v_n, und die Reihe Σv_n noch konvergiert.

II. *Wenn die Glieder der beiden Reihen Σu_n und Σv_n von einem gewissen n an sämtlich positiv sind, und zwar so, daß die u_n mit wachsendem n ihren Quotienten nach nicht schneller abnehmen, speziell nicht kleiner sind, als die v_n, so divergiert die Reihe Σu_n sicher, wenn dies mit Σv_n der Fall ist.*

Man findet in der Tat mit denselben Bezeichnungen wie vorher $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + v_{n+p} \geqq a_n \cdot (v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+p})$.

Beispiel 2. Die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \cdots$$

ist divergent; denn es ist für positive ganze n

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

Beispiel 3. Satz von Cauchy[1]);

III. *Die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n konvergiert oder divergiert, je nachdem*

$$(1) \qquad \limsup_{n=\infty} |\sqrt[n]{u_n}| < 1 \quad \textit{oder} \quad \liminf_{n=\infty} |\sqrt[n]{u_n}| > 1$$

ist.

Im ersten Falle ist es nämlich möglich eine solche positive Zahl λ anzugeben, daß für $n \geqq N$ immer

$$(2) \qquad |\sqrt[n]{u_n}| < \frac{1}{1+\lambda}, \quad u_n < \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^n$$

wird; im zweiten Falle findet man mit denselben Bezeichnungen

$$(3) \qquad |\sqrt[n]{u_n}| > 1 + \lambda, \; u_n > (1+\lambda)^n.$$

In (2) nehmen die u_n rascher ab als die Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe; in (3) wachsen die u_n aber rascher als die Glieder einer divergenten Reihe.

87. Für die Reihen mit positiven Gliedern Σu_n und Σv_n gilt von einem gewissen n an die Beziehung $u_n - u_{n+1} \leqq v_n - v_{n+1}$; darf man hieraus schließen, daß die Reihe Σu_n konvergiert, wenn man weiß, daß Σv_n diese Eigenschaft hat? Beispiel $u_n = 1 + n^{-3}$, $v_n = n^{-2}$.

88. Man soll die Divergenz der Reihe

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \cdots$$

nachweisen.

89. Es ist zu beweisen, daß die Reihe $\sum (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ bedingt konvergiert.

90. Man hat für jedes endliche x die Divergenz der beiden Reihen $\sum \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ und $\sum \frac{1}{n} \cdot \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ nachzuweisen.

1) Analyse algébrique, p. 133; 1821.

§ 37. **Methode von Bernoulli, Nicole, Abel und Pringsheim.**

Jakob Bernoulli[1]) und Nicole[2]) haben durch einige Beispiele ein Verfahren, daß in dem folgenden Satz gipfelt, angegeben:

I. *Die Zahlenfolge*

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n, \cdots \tag{1}$$

und die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$u_{n+1} = a_n - a_{n+1}, \quad u_0 = a_0 \tag{2}$$

sind gleichzeitig konvergent, divergent oder oszillierend.

Für die Partialsumme s_n hat man in der Tat

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = a_0 - a_n, \quad s_0 = a_0, \tag{3}$$

woraus umgekehrt der Ausdruck

$$a_n = s_0 - s_n, \quad a_0 = s_0 \tag{4}$$

hergeleitet werden kann; damit ist unser Satz aber bewiesen.

Konvergiert nun z. B. die Zahlenfolge (1), so hat man wegen (3)

$$\lim_{n=\infty} s_n = a_0 - \lim_{n=\infty} a_n, \tag{5}$$

während die Konvergenz der Reihe wegen (4) das ähnliche Resultat

$$\lim_{n=\infty} a_n = s_0 - \lim_{n=\infty} s_n \tag{6}$$

liefert.

Um dies Verfahren anwenden zu können kommt es also darauf an die einzelnen Reihenglieder in Differenzen von der Form (2) zu zerspalten.

Der Satz I kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden.

II. *Wenn die Zahlenfolge* (1) *divergiert, und wenn kein einziges ihrer Elemente den Wert Null hat, so konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Gliede*

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}. \tag{7}$$

Aus II findet man nun ohne Mühe den weiteren Satz, den man in seiner Vollständigkeit Pringsheim[3]) verdankt:

III. *Wenn die Zahlenfolge* (1) *mit lauter positiven Elementen monoton wachsend und divergent ist, so konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Gliede*

1) Opera Bd. I, p. 389, 523.
2) Histoire de l'Académie (Paris) 1727, p. 257—268.
3) Mathematische Annalen, Bd. 35, p. 329; 1890.

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} \cdot a_n^{\varrho}} \tag{8}$$

immer, wenn der Exponent ϱ positiv angenommen wird.

Da $\varrho > 0$ vorausgesetzt wird, so konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$v_n = \frac{a_{n+1}^{\varrho} - a_n^{\varrho}}{a_{n+1}^{\varrho} \cdot a_n^{\varrho}} = \frac{1}{a_n^{\varrho}} - \frac{1}{a_{n+1}^{\varrho}};$$

nun hat man aber

$$v_n = \frac{a_{n+1}^{\varrho} - a_n^{\varrho}}{a_{n+1} - a_n} \cdot \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}^{\varrho} \cdot a_n^{\varrho}} = \frac{1 - q_n^{\varrho}}{1 - q_n} \cdot u_n, \tag{9}$$

wo u_n das Reihenglied (8) bezeichnet, während der Kürze halber

$$q_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

gesetzt worden ist.

Nun kann die obere Grenze der Zahlenfolge

$$q_{n+1}, \quad q_{n+2}, \quad q_{n+3}, \cdots$$

niemals die Einheit übersteigen; die obere und untere Grenze G und g der anderen Zahlenfolge

$$\frac{1 - q_m^{\varrho}}{1 - q_m}, \qquad m = n,\ n+1,\ n+2, \cdots,$$

deren Elemente sämtlich *positiv* sind, sind daher wegen § 24 (19) immer endlich bzw. größer als 0, und man hat nun wegen (9)

$$v_n \geqq g \cdot u_n,$$

woraus für jedes p

$$v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+p} \geqq g\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p})$$

folgt, und damit ist unser Satz bewiesen, weil $g > 0$ ist.

Spezialfälle des Pringsheimschen Satzes kommen mehrmals in der Literatur vor; hier erwähnen wir einige von Abel[1]) betrachtete Spezialfälle:

Setzt man $a_n = n$, und beachtet man die Ungleichung

$$u_n = \frac{1}{(n+1)n^{\varrho}} > \frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}},$$

so erhält man den von Cauchy[2]) gefundenen spezielleren Satz:

IV. *Die unendliche Reihe*

---

1) Œuvres Bd. II, p. 198.

2) Analyse algébrique, p. 137; 1821.

$$(10) \qquad \frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{4^{1+\varrho}} + \cdots$$

konvergiert für $\varrho > 0$, *divergiert aber für* $\varrho \leqq 0$.

Für $\varrho = 0$ ist die Reihe (10) die harmonische, also divergent; sie muß daher um so mehr für negative ϱ divergieren.

Aus (8) findet man den anderen Satz von Abel:

V. *Ist* Σu_n *eine divergente Reihe mit positiven Gliedern, und ist* $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, *so konvergiert die Reihe* $\Sigma u_n \cdot s_n^{-1-\alpha}$, *wenn* α *positiv ist.*

Setzt man in der Tat $s_n = a_n$, so ist $u_n = a_n - a_{n-1}$, während $s_n s_{n-1}^{\varrho} < s_n^{1+\varrho}$ ist.

Setzt man in § 23 (9) $a = n + 1$, $b = n$, so entfließen für hinlänglich große n die Ungleichungen

$$\frac{1}{n \log n \log_2(n) \cdots \log_r(n)} > \log_{r+1}(n+1) - \log_{r+1}(n)$$

$$\frac{1}{(n+1)\log(n+1)\log_2(n+1)\cdots\log_r(n+1)(\log_{r+1}(n+1))^{1+\varrho}} < \frac{1}{(\log_{r+1}(n+1))^{\varrho}} - \frac{\log_{r+1}(n)}{(\log_{r+1}(n+1))^{\varrho+1}},$$

woraus der neue Satz hergeleitet werden kann:

VI. *Die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede*

$$(11) \qquad \frac{1}{n \log n \log_2(n) \cdots \log_{r-1}(n) (\log_r(n))^{1+\varrho}}$$

konvergiert für $\varrho > 0$, *divergiert aber für* $\varrho \leqq 0$.

Dieser Satz war schon Abel[1]) bekannt, wurde aber von ihm selbst nicht publiziert; er scheint zum ersten Male von Betrand[2]) veröffentlicht zu sein.

Der Satz VI kann übrigens dahin verallgemeinert werden, daß die positive ganze Zahl r nicht denselben Wert für sämtliche Reihenglieder zu haben braucht, sondern sie kann vielmehr mit n variieren, vorausgesetzt, daß sie für jedes n endlich bleibt.

Setzt man nämlich in (11) r_n anstatt r und ϱ positiv, so sind die positiven Glieder dieser Reihe nicht *größer* als diejenigen der konvergenten Reihe, für welche r konstant ist und den Maximalwert von r_n hat; ist aber $\varrho \leqq 0$, so sind die positiven Glieder unserer Reihe nicht *kleiner* als diejenigen der divergenten Reihe, für welche r konstant ist und mit dem Maximalwert von r_n zusammenfällt.

1) Œuvres Bd. II, p. 200.

2) Journal de Mathématiques. Bd. 7, p. 98; 1842.

Diese Reihen mit veränderlichem r liefern demnach Beispiele von konvergenten oder divergenten Reihen, deren Glieder, die nach einem einfachen Gesetze zu bilden sind, sämtlich positiv sind aber in willkürlicher Weise zu- und abnehmen mit wachsendem Stellenzeiger.

Der Satz VI gestattet uns noch weiter eine sonderbare Konvergenzbedingung, die in der älteren Reihenlehre vorkommt, abzufertigen; man hat in der Tat behauptet, daß die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n dann und nur dann konvergieren könnte, wenn

$$\lim_{n=\infty}(n \cdot u_n) = 0 \tag{12}$$

wäre.

Daß diese Bedingung nicht *notwendig* sein kann, liegt auf der Hand; setzt man in der Tat

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_{n^2} = \frac{1}{n^2}, \quad u_{n^4} = \frac{1}{n^2},$$

wo in den zwei ersten Definitionen n nicht quadratisch sein darf, so konvergiert die Reihe Σu_n sicher wegen IV, und dennoch hat man für *gewisse* n

$$\lim_{n=\infty}(n \cdot u_n) = 1, \quad \lim_{n=\infty}(n \cdot u_n) = \infty;$$

der Grenzwert (12) existiert somit *nicht* in diesem Falle, und doch ist unsere Reihe konvergent.

Daß die Bedingung (12) auch nicht *hinreichend* sein kann, bewies Abel[1]) durch die Reihe (11) für $r = 1$, $\varrho = 0$; denn die Glieder dieser divergenten Reihe genügen doch der Bedingung (12).

Als weiteres Beispiel wollen wir noch den für $\alpha > 0$ und $\alpha + \beta > 1$ gültigen Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{1^\beta} + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\beta}\right)\right] = 0 \tag{13}$$

herleiten; ist $1 \leqq r \leqq n$, so hat man offenbar für δ positiv und $\delta \leqq \alpha$

$$\frac{1}{n^\alpha \cdot r^\beta} = \frac{1}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-\delta} \cdot r^\beta} < \frac{1}{n^\delta} \cdot \frac{1}{r^{\alpha+\beta-\delta}},$$

woraus

$$\frac{1}{n^\alpha} \cdot \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r^\beta} < \frac{1}{n^\delta} \cdot \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r^{\alpha+\beta-\delta}}$$

folgt; wählt man nun δ so klein, daß auch $\alpha + \beta > 1 + \delta$ wird, so folgt (13) unmittelbar aus dem Satze IV.

1) Journal für Mathematik Bd. 3; 1828. Œuvres Bd. I. p. 329.

91. Wenn die positiven Glieder der unendlichen Reihe Σu_n monoton abnehmen, so konvergiert diese Reihe sicher, wenn $\lim (n\,u_n) = 0$ für $n = \infty$ ist, und wenn außerdem diese andere Reihe $\Sigma n(u_n - u_{n+1})$ konvergiert.

92. Wenn die Reihe mit *reellen* Gliedern Σu_n konvergiert, und die Zahlenfolge

$$u_1,\ 2u_2,\ 3u_3, \cdots, nu_n \cdots$$

einen Grenzwert hat, also entweder konvergiert oder eigentlich divergiert, so hat man diesen Grenzwert zu bestimmen.

93. Es ist die für $x \neq 0$ gültige Formel

$$1 = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \cdots$$

zu beweisen (Jakob Bernoulli[1])).

94. Man soll die unendliche Reihe

$$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} + \frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} + \cdots$$

untersuchen.

95. Für positive α und β und $\alpha + \beta > 1$ hat man den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n^\alpha \cdot 1^\beta} + \frac{1}{(n-1)^\alpha \cdot 2^\beta} + \cdots + \frac{1}{1^\alpha \cdot n^\beta} \right] = 0.$$

96. Für $\alpha > 1$ und $\alpha + \beta > 2$ konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{1}{n^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{1^\beta} + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^\beta} \right).$$

97. Setzt man der Kürze halber, wie

$$R'_{n,p} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{np},$$

so behauptete Euler[2]), daß die Reihe Σu_n dann und nur dann konvergieren könnte, wenn für $n \geqq N$ immer $|R'_{n,p}| < \varrho$ ist; mit Pringsheim[3]) soll man unter Anwendung der Reihe § 37 (11) für $r = 1$, $\varrho = 0$ nachweisen, daß diese notwendige Bedingung keine hinreichende sein kann, wenn p *endlich* gehalten wird.

§ 38. Sätze von Abel, Dini und Jensen.

Unter Zuhilfenahme seines Grenzsatzes § 19, I hat Jensen einen sehr allgemeinen Reihensatz hergeleitet.

---

1) Opera Bd. I, p. 522.

2) Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 7, p. 152—153; (1734—1735) 1740.

3) Bibliotheca Mathematica (3), Bd. 6, p. 252—256; 1905.

Es sei in der Tat Σu_n eine willkürliche *konvergente* Reihe, während die Zahlen a_n den beiden Bedingungen § 19 (1) und (2) genügen, d. h.

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty, \tag{1}$$

$$|a_1| + |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2 + \cdots + |a_n - a_{n-1}| < B.|a_n|, \tag{2}$$

wo B eine feste von n unabhängige positive Konstante bezeichnet, so hat man, indem man § 19, I auf $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$ anwendet und bemerkt, daß $s_n - s_{n-1} = u_n$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n}{a_n} \right) = 0. \tag{3}$$

Setzt man demnach für jedes n

$$a_n \alpha_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n, \quad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0 \tag{4}$$

so ist auch

$$a_{n-1} \alpha_{n-1} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1},$$

woraus nach Subtraktion von (4) und Division durch a_n:

$$u_n = \frac{a_n \alpha_n - a_{n-1} \alpha_{n-1}}{a_n} \tag{5}$$

folgt; da nun die Reihe Σu_n jedenfalls nur dann konvergieren kann, wenn α_n mit unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustrebt, so hat man, wenn man in (5), für jedes n, $\alpha_n = 1$ setzt, den Satz von Jensen:[1])

I. *Wenn die Zahlen a_n den beiden Bedingungen* (1) *und* (2) *Genüge leisten, sonst aber ganz willkürlich sind, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \tag{6}$$

immer divergent.

Aus diesem Satze kann man nunmehr unmittelbar verschiedene andere interessante Folgerungen über Reihen herleiten.

Ist Σu_n eine willkürliche divergente Reihe mit positiven Gliedern, so genügen die Partialsummen

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

den beiden Bedingungen (1) und (2); man hat ja in der Tat

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = s_n$$

1) Tidsskrift for Mathematik (5), Bd. 2, p. 83; 1884.

und braucht also nur $B > 1$ anzunehmen; da nun $s_n - s_{n-1} = u_n$ ist, so erhält man aus I den spezielleren Satz von Dini:[1])

II. *Ist Σu_n eine willkürliche divergente Reihe mit positiven Gliedern, so divergiert auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{s_n}, \quad s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \tag{7}$$

Aus dem Dinischen Satze folgt unmittelbar ein anderer, der von Abel[2]) herrührt; es ist in der Tat für $\alpha \geqq 0$

$$s_n > s_{n-1} \geqq s_{n-1}^{1-\alpha}, \qquad \frac{u_n}{s_n} < \frac{u_n}{s_{n-1}^{1-\alpha}}$$

woraus der Abelsche Satz hervorgeht:

III. *Ist Σu_n eine willkürliche divergente Reihe mit positiven Gliedern, und wird $\alpha \geqq 0$ vorausgesetzt, so divergiert auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{s_{n-1}^{1-\alpha}}. \tag{8}$$

Es sei endlich Σu_n eine willkürliche *konvergente* Reihe mit positiven Gliedern; dann darf man in (6)

$$u_n = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}, \quad R_n - R_{n+1} = u_{n+1} > 0$$

einführen, und somit entfließt der weitere Satz von Dini:[3])

IV. *Ist Σu_n eine willkürliche konvergente Reihe mit positiven Gliedern, so divergieren immer die Reihen*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{R_{n-1}} < \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{R_n}, \quad R_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty} u_p. \tag{9}$$

---

98. Mit den Bezeichnungen in § 38 (9) hat man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_n}{u_n}$$

in denjenigen Fällen zu untersuchen, wo die ursprüngliche konvergente Reihe mit positiven Gliedern Σu_n 1) die Reihe für e, 2) die geometrische Reihe Σq^n, $0 < q < 1$, 3) die Reihe Σn^{-2} ist.

1) Sulle serie a termini positivi, p. 9. Annali Univ. Toscana. Bd. 9; 1867.
2) Œuvres, Bd. II, p. 198.
3) loc. cit. p. 7.

99. Man hat die Reihe in Aufgabe 98 in demjenigen Falle zu untersuchen, wo für jedes n, $u_n = e^{-n\alpha}$, α reell, angenommen wird.

§ 39. Sätze von du Bois Reymond und Dedekind.

Als Verallgemeinerung desjenigen in § 15 dargestellten Hilfssatzes von Abel haben wir die folgenden zwei Sätze, die beinahe gleichzeitig von P. du Bois Reymond[1]) und Dedekind[2]) gefunden worden sind:

I. *Es seien* $a_0 a_1 a_2 \cdots$, $b_0 b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ *zwei unendliche Folgen willkürlicher komplexer Zahlen, die nur denjenigen Bedingungen genügen, daß die beiden Reihen*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} |b_n - b_{n+1}|$$

konvergieren, so konvergiert auch die Reihe $\Sigma a_n b_n$.

Setzt man der Kürze halber

$$R_{n,p} = a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}$$
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad s_{n+1} - s_n = a_{n+1},$$

so hat man unmittelbar

$$R_{n,p} = (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1}) b_{n+2} + \cdots + (s_{n+p} - s_{n+p-1}) b_{n+p},$$

woraus nach einer einfachen Umschreibung folgt:

$$(2) \qquad R_{n,p} = (s_{n+p} b_{n+p} - s_n b_{n+1}) + \sum_{q=1}^{q=p-1} s_{n+q} (b_{n+q} - b_{n+q+1}).$$

Da nun die erste Reihe (1) konvergiert, so hat man für jedes n

$$(3) \qquad |s_n| < A,$$

wo A eine endliche positive Zahl bedeutet; daher muß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$s_m (b_m - b_{m+1})$$

absolut konvergieren, weil dies mit der zweiten Reihe (2) der Fall ist; für $n \geqq N$ hat man daher immer

$$(4) \qquad \left| \sum_{q=1}^{q=p-1} s_{n+q} (b_{n+q} - b_{n+q+1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus der Identität[3])

1) Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen, p. 10. Antrittsprogramm, Freiburg 1871.

2) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie § 101, 3. Aufl. 1879.

3) Es wird natürlich vorausgesetzt, daß b_0 eine endliche und bestimmte Zahl bezeichnet.

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) = b_0 - b_n$$

schließt man nun weiter, daß die Reihe linker Hand absolut konvergieren muß, wenn man n über jede Grenze hinauswachsen läßt; denn dies ist ja nur die Forderung über die zweite Reihe (1); die Zahl b_n muß daher für $n = \infty$ einem endlichen und bestimmten Grenzwerte zustreben; d. h. die Zahlenfolge

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_n,\ \cdots$$

muß eine Fundamentalreihe sein.

Da die Folge

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots\ s_n,\ \cdots,\quad s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

auch wegen der Konvergenz der ersten Reihe (1) eine Fundamentalreihe ist, so müssen die beiden Zahlenfolgen mit den allgemeinen Gliedern $s_n b_n$ und $s_n b_{n+1}$ denselben Grenzwert haben; es ist demnach auch für $n \geq N$ immer

$$s_{n+p} b_{n+p} - s_n b_{n+1} \ < \frac{\varepsilon}{2},$$

und, somit, indem p eine willkürliche positive ganze Zahl ist, für $n \geq N$ immer $|R_{n,p}| < \varepsilon$; d. h. die Reihe $\Sigma a_n b_n$ ist konvergent.

Aus (2) und (3) findet man nun auch unmittelbar den folgenden Satz:

II. *Es seien* $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, $b_0 b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ *zwei unendliche Folgen willkürlicher komplexer Zahlen, die nur den drei folgenden Bedingungen genügen:*

(5) $$\lim_{n=\infty} b_n = 0,$$

die Reihe $\Sigma\ b_n - b_{n+1}$ *ist konvergent, und die Reihe* Σa_n *oszilliert zwischen endlichen Grenzen; dann konvergiert die Reihe* $\Sigma a_n b_n$.

Der vorhergehende Beweis ist ungeändert anwendbar, wenn man nur bemerkt, daß wegen (5) die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Elemente $s_n b_{n+q}$ eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte 0 ist.

---

100. Für $\alpha > 0$ und $\alpha + \beta > 1$ konvergiert die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1^\beta} + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^\beta}\right) \quad n \geq 2.$$

101. Wenn $\Sigma|a_n - a_{n+1}|$ konvergiert, und $\lim a_n = 0$ für $n = \infty$ ist, so konvergieren die beiden Reihen $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma a_n \sin nx$ immer, wenn x kein Vielfaches von 2π ist.

102. Es ist zu beweisen, daß die Reihe

$$\frac{2\log 2}{x+1} - \frac{3\log 3}{x+2} + \frac{4\log 4}{x+3} + \cdots + \frac{(-1)^n n\log n}{x+n-1} + \cdots$$

für jeden endlichen Wert von x, der nicht negativ ganz ist, konvergiert.

103. Wenn die a_n von x sämtlich unabhängig sind, und die Reihe

$$\frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3} + \cdots + \frac{a_n}{x+n} + \cdots$$

für *einen* endlichen Wert von x konvergiert, so konvergiert sie für *jedes* endliche x, das nicht negativ ganz ist. Wie verhält sich diese Reihe für einen solchen Ausnahmewert von x?

104. Es ist zu beweisen, daß die beiden Reihen mit positiven Gliedern

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n}$$

divergieren.

105. Wenn sowohl Σa_n als $\Sigma |b_n - b_{n+1}|$ konvergieren, so konvergiert auch die Reihe $\Sigma a_n b_n^p$, p positiv ganz. (Jensen.)[1])

106. Wenn die Reihe $\Sigma |b_n - b_{n+1}$ konvergiert, und $\lim b_n = 0$ für $n = \infty$ ist, so konvergiert die Reihe $\Sigma(-1)^n b_n^p$, p positiv ganz (Jensen.)[1])

Kapitel IX.

Elementare Konvergenzkriterien.

§ 40. Sätze von Cauchy, Raabe und Kummer.

Kummer[2]) hat den ebenso merkwürdigen wie fundamentalen Satz gefunden:

I. *Die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n ist immer konvergent, wenn es möglich ist eine solche Zahlenfolge mit positiven Elementen*

(1) $$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n \cdots$$

zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

(2) $$\varphi_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} > \alpha > 0$$

wird.

1) Tidsskrift for Mathematik (5), Bd. 2, p. 69; 1884.

2) Journal für Mathematik, Bd. 13, p. 172; 1835.

Da die Glieder u_n sämtlich positiv sind, ergibt sich wegen (2)

$$\begin{aligned}
&\varphi_n u_n &&- \varphi_{n+1} u_{n+1} \geqq \alpha u_{n+1}\\
&\varphi_{n+1} u_{n+1} &&- \varphi_{n+2} u_{n+2} \geqq \alpha u_{n+2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{n+p-1} u_{n+p-1} &&- \varphi_{n+p} u_{n+p} \geqq \alpha u_{n+p},
\end{aligned}$$

woraus durch Addition hervorgeht:

$$(3) \qquad \varphi_n u_n - \varphi_{n+p} u_{n+p} \geqq \alpha \cdot (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}).$$

Da nun die Summe rechter Hand in (3) positiv ist, so muß die Differenz linker Hand offenbar dieselbe Eigenschaft besitzen; es ist daher für jedes p

$$(4) \qquad u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \leqq \frac{\varphi_n u_n}{\alpha};$$

die Reihensumme linker Hand muß daher *endlich* sein, wie groß auch p angenommen wird, und daraus folgt unmittelbar die Konvergenz unserer Reihe, weil sie nicht oszillieren kann.

Kummer[1]) hat auch den folgenden Divergenzsatz aufgestellt:

II. *Die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n ist immer divergent, wenn man die Zahlenfolge* (1) *mit positiven Elementen so bestimmen kann, daß für $n \geqq N$ immer*

$$(5) \qquad \varphi_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} < 0$$

wird, und wenn die Reihe $\Sigma 1 : \varphi_n$ außerdem divergiert.

Aus (5) erhält man in der Tat unmittelbar

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqq \frac{\frac{1}{\varphi_n}}{\frac{1}{\varphi_{n+1}}};$$

d. h., daß die Glieder der Reihe Σu_n ihren Quotienten nach *langsamer* abnehmen als diejenigen der divergenten Reihe $\Sigma 1 : \varphi_n$.

Die von Kummer geforderte weitere Bedingung über die Zahlenfolge (1):

$$\lim_{n=\infty} (\varphi_n u_n) = 0$$

ist also, wie Dini[2]) zum ersten Male bewiesen hat, nicht notwendig.

In § 56 beweisen wir, daß wir auch im Kummerschen Kon-

1) loc. cit. p. 172.

2) Sulle serie a termini positivi, p. 6. Annali Univ. Toscana, Bd. 9; 1867.

vergenzkriterium nur solche Zahlenfolgen (1) zu benutzen brauchen, für welche die Reihe $\Sigma 1 : \varphi_n$ *divergiert.*

Aus den Sätzen I und II leitet man nunmehr verschiedene ältere aber viel speziellere Konvergenz- und Divergenzkriterien unmittelbar ab.

Setzt man in der Tat in (2) und (5) $\varphi_n = 1$, so erhält man den Satz von Cauchy:[1])

III. *Die Reihe mit positiven Gliedern* Σu_n *konvergiert oder divergiert, je nachdem*

$$\liminf_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \quad \textit{oder} \quad \limsup_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 \tag{6}$$

ist.

Ist die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied $u_n : u_{n+1}$ konvergent mit dem Grenzwerte 1, so wird der Satz von Cauchy hinfällig; in diesem Falle setzen wir in (2) und (5) $\varphi_n = n$ und erhalten dann unmittelbar den folgenden von Raabe[2]) gefundenen, von Duhamel[3]) aber wiedergefundenen Satz:

IV. *Hat man für die Reihe mit positiven Gliedern* Σu_n *eine Entwicklung von der Form:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1+\alpha}{n} + \cdots, \tag{7}$$

so konvergiert oder divergiert unsere Reihe, je nachdem $\alpha > 0$ *oder* $\alpha < 0$ *ist.*

Dieser Satz wird unbrauchbar für $\alpha = 0$; über diesen Fall hat Raabe[4]) den folgenden Hilfssatz gegeben:

V. *Hat man für die Reihe mit positiven Gliedern* Σu_n *eine Entwicklung von der Form*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{a}{n^{1+\delta}} + \cdots, \tag{8}$$

wo a *endlich ist, während* δ *eine willkürlich kleine, aber angebbare, positive Zahl bezeichnet, so divergiert die Reihe* Σu_n *immer.*

Setzt man in der Tat in (5) $\varphi_n = n \log n$, so divergiert die

1) Analyse algébrique, p. 134; 1821.

2) Journal von Ettinghausen und Baumgartner, Bd. 10; 1832. Journal für Mathematik, Bd. 11, p. 309—311; Journal de Mathématiques, Bd. 6, p. 85—88; 1841.

3) Journal de Mathématiques, Bd. 4, p. 214—221; 1839.

4) loc. cit.

Reihe $\Sigma 1 : \varphi_n$ und man findet wegen (8)

$$n \log n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\log(n+1) =$$
$$= (n+1)\log n - (n+1)\log(n+1) + \frac{a \log n}{n^\delta} + \cdots,$$

woraus

$$\varphi_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} = -(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{a \log n}{n^\delta} + \cdots$$

hervorgeht, und der Ausdruck rechter Hand ist hier für n hinlänglich groß negativ und hat für $n = \infty$ den Grenzwert -1, wie dies deutlich aus den Formeln § 23, (20) und § 24, (17) hervorgeht.

---

107. Es ist die Divergenz der Reihe $\Sigma n^{-1-\frac{1}{n}}$ nachzuweisen.

108. Konvergenzsatz von Gauß[1]): Wenn die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n eine Darstellung von der Form

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p},$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, gestattet, so konvergiert oder divergiert diese Reihe, je nachdem $a_1 - b_1 > 1$ oder $a_1 - b_1 \leqq 1$ ist.

109. Man hat die Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots$$

für reelle α, β und γ zu untersuchen.

§ 41. Das logarithmische Kriterium.

In demjenigen Falle, wo der Satz von Raabe versagt, hat man das sogenannte logarithmische Kriterium:

I. *Die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n konvergiert oder divergiert, je nachdem*

$$(1) \qquad \liminf_{n=\infty} \frac{\log(1 : U_n)}{\log_r(n)} > 0 \quad \textit{oder} \quad \limsup_{n=\infty} \frac{\log(1 : U_n)}{\log_r(n)} < 0$$

ist, indem wir der Kürze halber

$$(2) \qquad U_n = u_n \cdot n \log n \log_2(n) \ldots \log_{r-1}(n)$$

gesetzt haben.

---

1) Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. § 16. Comment. Götting. 1813. Werke Bd. III.

Bezeichnet nämlich a_n für ein bestimmtes n den in (1) vorkommenden Bruch, so hat man wegen (2)

$$\log u_n + \log n + \log_2(n) + \cdots + \log_r(n) = -a_n \log_r(n),$$

woraus

$$u_n = \frac{1}{n \log n \log_2(n) \ldots \log_{r-1}(n) (\log_r(n))^{1+a_n}} \tag{3}$$

hervorgeht, und unser Satz ist demnach eine Folge des in § 37 gegebenen spezielleren Satzes VI.

Dies Konvergenzkriterium war schon Abel[1]) bekannt, ist aber von Bertrand[2]) wiedergefunden worden; es ist jedoch zu bemerken, daß de Morgan[3]) etwas früher einen ähnlichen Satz gegeben hat.

Wie Bertrand[4]) bemerkt, kann der Satz I auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

II. *Wenn in den folgenden Ausdrücken*

$$\begin{cases} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = k_0 \\ \log n \left(n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = k_1 \\ \log_2(n) \left(\log n \left(n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - 1\right) = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

k_r die erste der Zahlen k bedeutet, die nicht für $n = \infty$ dem Grenzwerte 1 zustrebt, so konvergiert oder divergiert die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n, je nachdem $k_r > 1$ oder $k_r < 1$ ist.

Ist schon $\lim k_0 \neq 1$ für $n = \infty$, so fällt der Satz II mit demjenigen von Raabe zusammen.

Es sei nun aber $\lim k_{r+1} = l$ für $n = \infty$ nicht der Einheit gleich, dann hat man wegen (4)

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{p=1}^{p=r} \frac{1}{n \log n \log_1(n) \cdots \log_p(n)} + \frac{k_{r+1}}{n \log n \log_2(n) \cdots \log_{r+1}(n)}, \tag{5}$$

1) Œuvres Bd. II, p. 201.
2) Journal de Mathématiques Bd. 7, p. 42; 1842.
3) Differential and integral calculus; London 1839.
4) loc. cit. p. 43.

während (3) diesen anderen Ausdruck

$$(6)\qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2(n)}\cdots\frac{\log_r(n+1)}{\log_r(n)}\cdot \left(\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1}(n)}\right)^{1+a_n}$$

liefert; aus der Formel § 23, (20) findet man aber

$$(7)\quad \log(n+1) = \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log n\cdot\left(1+\frac{1}{n\log n}+\frac{\alpha}{n^2\log n}\right),$$

wo α für unbegrenzt wachsendes n stets endlich bleibt; durch dasselbe Verfahren erhält man dann wegen (7)

$$\log_2(n+1) = \log_2(n)\left(1+\frac{1}{n\log n\log_2(n)}+\frac{\beta}{n^2}\right),$$

wo β auch für unbegrenzt wachsendes n endlich bleibt.

In dieser Weise kann man nun beliebig oft fortfahren; dadurch erhält man durch vollständige Induktion die allgemeine Formel

$$(8)\quad \log_p(n+1) = \log_p(n)\left(1+\frac{1}{n\log n\log_2(n)\cdots\log_p(n)}+\frac{\lambda}{n^2}\right),$$

wo λ für unbegrenzt wachsendes n stets endlich bleibt.

Aus (6) und (8) findet man aber wegen § 24, (18)

$$(9)\qquad \left(\frac{\log_p(n+1)}{\log_p(n)}\right)^{1+a_n} = 1+\frac{1+a_n}{n\log n\log_2(n)\cdots\log_p(n)}+\frac{k}{n^2};$$

setzt man demnach in (8) nacheinander $p=1, 2, 3, \cdots, r$ und in (9) $p=r+1$, so ergibt die Multiplikation aller so erhaltenen Gleichungen in Verbindung mit (6)

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1+\dfrac{1}{n}+\displaystyle\sum_{p=1}^{p=r}\frac{1}{n\log n\log_2(n)\cdots\log_p(n)} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1+a_n}{n\log n\cdots\log_{r+1}(n)}+\dfrac{\omega}{n^2}, \end{cases}$$

woraus wegen (5) das gewünschte Resultat

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty}(1+a_n-k_{r+1}) = 0$$

hervorgeht; die Sätze I und II sind somit identisch.

Das logarithmische Kriterium ist auch von Bonnet[1]), Bonniakovsky[2]) und v. Paucker[3]) untersucht worden.

1) Journal de Mathématiques Bd. 8, p. 73—109; 1843.

2) Wahrscheinlichkeitsrechnung (Russisch) St. Petersburg 1846. (Zitat nach v. Paucker).

3) Journal für Mathematik Bd. 42, p. 138—150; 1851.

Wir können nicht die vorhergehenden elementaren Kriterien verlassen ohne auf den außerordentlich elementaren Charakter der Sätze von Cauchy, Raabe und Bertrand ausdrücklich aufmerksam zu machen; die Anwendungen dieser Sätze setzen ja stillschweigend voraus, daß die Reihenglieder eine monoton abnehmende Zahlenfolge bilden, während dies bei dem Kummerschen Satze nicht der Fall ist.

Nun haben wir aber gesehen, daß bei Reihen mit positiven Gliedern, wie bei unbedingt konvergenten Reihen überhaupt, die Anordnung der Reihenglieder eine ganz willkürliche ist!

Dies ist aber noch nicht alles; setzt man nämlich mit Pringsheim[1])

$$u_{2n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{2n}, \quad u_{2n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{2n+1},$$

so konvergiert diese Reihe, und es ist immer $u_n > u_{n+1}$; dennoch hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1, \lim_{n=\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 0,$$

so daß keiner der obengenannten drei Sätze auf diese Reihe anwendbar ist.

Wir haben daher später (in Kapitel XIII) eine allgemeine Theorie der Reihen mit positiven Gliedern zu entwickeln.

Über das logarithmische Kriterium vergleiche man übrigens § 52.

Die allgemeine Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern ist von Dini[2]) und P. du Bois Reymond[3]) angebahnt, von Pringsheim[4]) entwickelt worden; man vergleiche auch das Lehrbuch von Borel[5]).

110. Es ist zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^{\alpha+\beta}},$$

wo α und β reell sind, konvergiert oder divergiert, je nachdem $\beta > 1$ oder $\beta \leqq 1$ ist. (Raabe[6]) und Bertrand[7]).)

1) Mathematische Annalen Bd. 35, p. 310; 1890.

2) Sulle serie e termini positivi. Pisa 1867. Annali Univ. Toscana Bd. 9; 1867.

3) Journal für Mathematik Bd. 76, p. 61—91; 1873.

4) Mathematische Annalen Bd. 35, p. 297—394; 1890.

5) Leçons sur les séries à termes positifs Paris 1902.

6) Journal de Mathématiques Bd. 6, p. 87; 1841.

7) Ebenda, Bd. 7, p. 52; 1842.

111. Setzt man der Kürze halber $\lambda(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, so konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\alpha\lambda(n)},$$

je nachdem $\alpha > 1$ oder $\alpha \leqq 1$ ist.

112. Wenn die Zahlen $p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_n \cdots$ von einem gewissen n an der Bedingung

$$n = \frac{p_n}{A \log p_n + B},$$

wo A und B feste, von n unabhängige Konstanten bezeichnen, Genüge leisten, so konvergiert oder divergiert die Reihe $\Sigma p_n^{-\alpha}$, je nachdem $\alpha \geqq 1$ oder $\alpha < 1$ ist (Bonnet[1]).

113. Sind die p_n dieselben Zahlen wie in Aufgabe 112, so konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{p_n \log p_n \log^2(p_n) \ldots \log_r(p_n) \left(\log_{r+1}(p_n)\right)^{\alpha}},$$

je nachdem $\alpha \geqq 1$ oder $\alpha < 1$ ist. (Bonnet[2]).

§ 42. Reihen mit komplexen Gliedern. Satz von Weierstraß.

Die Sätze von Cauchy und Raabe lassen sich ohne Schwierigkeit auf *unbedingt* konvergente Reihen mit willkürlichen komplexen Gliedern erweitern.

Aus dem Cauchyschen Satze erhalten wir unmittelbar:

I. *Die Reihe mit willkürlichen Gliedern* Σu_n *ist unbedingt konvergent, wenn*

$$\text{(1)} \qquad \liminf_{n=\infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| > 1$$

ist.

Aus dem Raabeschen Satze erhalten wir in ähnlicher Weise den folgenden:

II. *Hat man eine Entwicklung von der Form*

$$\text{(2)} \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha + i\beta}{n} + \frac{\gamma + i\delta}{n^2} + \cdots,$$

1) Ebenda, Bd. 8, p. 81; 1843.
2) loc. cit. p. 83.

so ist die Reihe mit willkürlichen Gliedern Σu_n *unbedingt konvergent für* $\alpha > 1$.

Aus (2) erhält man in der Tat

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = + \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{k}{n^2}},$$

woraus wegen § 24, (18) folgt:

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{l}{n^2} + \cdots$$

Andererseits bemerken wir ausdrücklich, daß wir kein allgemeines Mittel zur Untersuchung *bedingt* konvergenter Reihen besitzen. In diesem Zusammenhang haben wir aber den folgenden Satz von Weierstraß[1]) zu beweisen:

III. *Besteht die Entwicklung* (2), *so konvergiert die Reihe* $\Sigma\ (-1)^n u_n$ *für* α *positiv, während die Reihe mit positiven Gliedern* $\Sigma\,|\,u_{2n} - u_{2n+1}\,|$ *konvergiert oder divergiert, je nachdem* $\alpha > 0$ *oder* $\alpha \leqq 0$ *ist.*

Betrachten wir zuerst die Reihe mit positiven Gliedern, so hat man erstens wegen (2)

$$u_n' = u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \left(\alpha + i\beta + \frac{\gamma + i\delta}{2n} + \cdots \right);$$

weiter ergibt die Identität

$$\frac{1}{2n+p} = \frac{1}{2n} - \frac{p}{4n^2} + \frac{p^2}{8n^3} + \cdots, \qquad p < 2n \tag{3}$$

dann nach einer einfachen Division

$$\frac{u_n'}{u_{n+1}'} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+3}} \left(1 + \frac{1}{n} + \cdots \right); \tag{4}$$

endlich ist

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+3}} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} \cdot \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}},$$

woraus wegen (2) und (3)

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+3}} = 1 + \frac{\alpha + i\beta}{n} + \cdots$$

hervorgeht, und demnach erhält man aus (4)

$$\frac{u_{2n} - u_{2n+1}}{u_{2n+2} - u_{2n+3}} = 1 + \frac{1 + \alpha + i\beta}{n} + \cdots$$

1) Journal für Math. Bd. 51; 1856. Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 220. Werke Bd. I, p. 185.

Die Reihe $\Sigma \mid u_{2n}' - u_{2n+1} \mid$ ist daher wegen II konvergent für $\alpha > 0$ aber divergent für $\alpha \leqq 0$.

Was nun die Reihe $\Sigma (-1)^n u_n$ betrifft, so hat man

$$\sum_{p=0}^{p=2n+1} (-1)^p u_p = \sum_{p=0}^{p=n} (u_{2p} - u_{2p+1})$$

$$\sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^p u_p = \sum_{p=0}^{p=n-1} (u_{2p} - u_{2p+1}) + u_{2n};$$

es liegt uns daher nur ob zu beweisen, daß $\lim u_n$ für $n = \infty$ gleich Null ist.

Da $\alpha > 0$ vorausgesetzt wird, so hat man wegen (2)

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| \geqq 1 + \frac{k}{n+1}, k > 0;$$

setzt man demnach in diese Ungleichung nacheinander $n+1$, $n+2$, ..., $n+p$ anstatt n, so erhält man durch vollständige Induktion, indem man die so erhaltenen Gleichungen multipliziert:

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+p+1}} \right| > 1 + k \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+p+1} \right);$$

da nun hier n eine *bestimmte* positive ganze Zahl ist, während p beliebig groß angenommen werden darf, so divergiert die Reihe rechter Hand für unbegrenzt wachsendes p, d. h. u_m muß für $m = \infty$ den Grenzwert 0 haben.

Über Reihen mit komplexen Gliedern vergleiche man die Abhandlung von Pringsheim[1]).

Kapitel X.

Multiplikation unendlicher Reihen.

§ 43. Sätze von Cauchy, Abel, Mertens und Cesàro.

Sind s_n und t_n Partialsummen der zwei konvergenten Reihen

$$(1) \qquad \begin{cases} s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \\ t = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \end{cases}$$

und bezeichnen

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$$

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots$$

1) Archiv der Mathematik und Physik (3) Bd. 4, p. 1—19; 1903.

zwei unendliche Folgen beständig wachsender positiver ganzer Zahlen, so ist die Zahlenfolge

$$s_{p_0} t_{q_0}, s_{p_1} t_{q_1}, \ldots, s_{p_m} t_{q_m}, \ldots \tag{2}$$

sicher eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte $s \cdot t$.

Die Frage über die Darstellung als unendliche Reihe des Grenzwertes der Fundamentalreihe (2) hat Cauchy[1]) durch den folgenden Satz beantwortet:

I. *Wenn die zu multiplizierenden Reihen* (1) *beide unbedingt konvergieren, so hat man für ihr Produkt die Reihenentwicklung:*

$$st = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots, \tag{3}$$

wo der Kürze halber für jedes n

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_p v_{n-p} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 \tag{4}$$

gesetzt worden ist.

Um die Cauchysche Produktreihe (3) näher zu untersuchen betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n; \tag{5}$$

beachtet man nun, daß das Glied u_p in S_n durch $v_0, v_1, \cdots, v_{n-p}$ und mit keinem anderen Gliede v_q multipliziert vorkommt, so hat man offenbar

$$S_n = u_0 t_n + u_1 t_{n-1} + \cdots + u_n t_0. \tag{6}$$

Ist nun Σu_n *unbedingt*, die Reihe Σv_n aber nur konvergent, so setze man

$$t_{n-p} = t + \delta_{n-p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m, \quad m < \frac{n}{2} < m + 1$$

und erhält somit aus (6)

$$\begin{cases} S_n = t \cdot s_m + (u_0 \delta_n + u_1 \delta_{n-1} + \cdots + u_m \delta_{n-m}) \\ \qquad + (u_{m-1} t_{n-m-1} + \cdots + u_n t_0); \end{cases} \tag{7}$$

es seien dann δ_n und G_n die oberen Grenzen der Zahlen $|\delta_{n-p}|$ und $|t_{n-m-q}|$; dann hat man offenbar wegen (7)

$$\begin{cases} |S_n - t s_m| \leqq \delta_n \cdot (|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_m|) \\ \qquad + G_n (|u_{m+1}| + \cdots + |u_n|). \end{cases} \tag{8}$$

Da die Reihe Σu_p konvergiert, so ist der zu δ_n gehörige Faktor rechter Hand in (8) stets endlich, während der zu G_n gehörige Faktor das Restglied einer konvergenten Reihe darstellt; dasselbe gilt für δ_n, während G_n für jedes n endlich bleibt; man hat daher den

1) Analyse algébrique, pp. 147, 283; 1821.

Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} S_n = s \cdot t$$

oder den Satz von Mertens[1]), der denjenigen von Cauchy als Spezialfall enthält:

II. *Die Cauchysche Produktformel* (3) *ist sicher dann anwendbar, wenn die zu multiplizierenden Reihen beide konvergieren und zwar mindestens die eine unbedingt.*

Den obenstehenden Beweis verdankt man Jensen[2]); Cauchy hat seinen Satz bewiesen durch ein Verfahren analog mit demjenigen, welches wir in § 20 bei der Multiplikation von e^x und e^y angewendet haben.

Die Formel (6) gibt uns aber weitere Auskünfte über die Cauchysche Multiplikationsregel: setzt man in der Tat in dieser Formel nacheinander $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, 0 anstatt n, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=0}^{p=n} s_p t_{n-p}, \tag{9}$$

woraus wegen § 29, II hervorgeht

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{n} = s \cdot t, \tag{10}$$

d. h. der Satz von Cesàro[3]):

III. *Wenn die beiden zu multiplizierenden Reihen* (1) *nur konvergieren, so ist die Cauchysche Produktreihe* (3) *immer summierbar mit der Mittelsumme st.*

Da eine konvergente Reihe auch summierbar mit ihrer Summe als Mittelsumme ist, so ergibt sich unmittelbar aus III der folgende Satz von Abel[4]):

IV. *Wenn die beiden zu multiplizierenden Reihen* (1) *konvergieren, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Cauchyschen Multiplikationsregel, daß die Produktreihe* (3) *auch konvergiert.*

1) Journal für Mathematik Bd. 79, p. 182—184; 1874.

2) Tidsskrift for Mathematik (4) Bd. 3, p. 95—96; 1879. Nouv. Corresp. Math. Bd. 5, p. 430—432; 1879.

3) Darboux Bulletin (2) Bd. 14, p. 114—120; 1890.

4) Journal für Mathematik Bd. 1; 1826. Œuvres Bd. I, p. 225.

114. Es ist zu beweisen, daß die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$$

für $\alpha+\beta>1$, $\alpha>0$ und $\beta>0$ nach der Cauchyschen Regel multipliziert werden dürfen.

115. Setzt man der Kürze halber

$$s_{\alpha} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots, \quad \alpha > 1,$$

so hat man die folgende von Euler[1]) herrührende Formel

$$s_{\alpha} s_{\beta} = s_{\alpha+\beta} + c_{\alpha,\beta} + c_{\beta,\alpha},$$

wo der Kürze halber

$$c_{\alpha,\beta} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\frac{1}{1^{\beta}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{\beta}} \right)$$

gesetzt worden ist, zu beweisen.

116. Setzt man der Kürze halber

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{1^{\alpha}} - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} + \cdots, \quad \alpha > 0,$$

so hat man die beiden Produkte $s_{\alpha}\sigma_{\beta}$ und $\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}$ für $\alpha>1$ in ähnlicher Weise wie dasjenige in Aufgabe 115 zu entwickeln.

§ 44. Anderer Beweis des Satzes von Mertens.

Da die von Abel gegebene notwendige und hinreichende Bedingung für die Reihenmultiplikation sehr umständlich bei den Anwendungen ist, da weiter der von Jensen für den Mertenschen Satz gelieferte Beweis unauflöslich mit der unbedingten Konvergenz einer der zu multiplizierenden Reihen verbunden ist, so haben wir hier die Multiplikationsregel von einem anderen Gesichtspunkte aus zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Fundamentalreihe § 43, (2) aus, indem wir $p_n = q_n = n$ setzen, was ja offenbar für die Allgemeinheit unserer Methode ohne Belang ist; betrachten wir nun das Produkt $s_n t_n$, so erhalten wir ohne weiteres

$$s_n t_n = S_n + R_n, \tag{1}$$

1) Correspondances math. et phys. Bd. I, p. 191 (1743). Novi Commentarii Acad. Petrop. Bd. 20, p. 184; (1775) 1776. Vgl. mein Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 47. Leipzig 1906.

wo der Kürze halber

$$R_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p(v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_{n-p+1}) \tag{2}$$

gesetzt worden ist. Denn die Summe S_n enthält alle die Produkte $u_p v_q$, für welche $p + q \leq n$ ist und keine andere, während R_n die übrigen in $s_n t_n$ vorkommenden Produkte $u_p v_q$ enthält.

Aus (1) findet man aber unmittelbar den Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Multiplikation nach der Cauchyschen Regel der zwei konvergenten Reihen* Σu_n *und* Σv_n *besteht darin, daß*

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \tag{3}$$

ist.

Als erste Anwendung dieses Satzes wollen wir nunmehr durch denselben den Satz von Mertens beweisen; zu diesem Zwecke setzen wir die Reihe $\Sigma|u_n|$ als konvergent voraus, und es sei weiter

$$m = \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad m = \frac{n-1}{2},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist; dann erhalten wir aus (2)

$$R_n = \sum_{p=1}^{p=m} + \sum_{p=m+1}^{p=n}. \tag{4}$$

Es seien nun δ_n die obere Grenze von

$$|v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-p+1}|, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m$$

und G die obere Grenze von

$$|v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-p+1}|, \quad p = m+1, m+2, \ldots, n;$$

dann hat man wegen (4)

$$\begin{aligned} |R_n| \leq \delta_n \cdot (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_p|) \\ + G \cdot (|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_n|), \end{aligned}$$

woraus die Bedingung (3) unmittelbar folgt, weil die Reihen Σv_n und $\Sigma|u_m|$ beide konvergieren; denn δ_n ist obere Grenze des absoluten Betrages des Restgliedes in Σv_n; G ist immer endlich, und der zu G gehörende Faktor ist ein Restglied der Reihe $\Sigma |u_n|$.

§ 45. Sätze von Pringsheim.

Was die Multiplikation nach der Cauchyschen Regel zweier nur bedingt konvergierender Reihen betrifft, so hat Pringsheim[1])

1) Mathematische Annalen Bd. 21, p. 327—378; 1883.

einen sehr allgemeinen Satz gefunden, von welchem wir insbesondere den folgenden Spezialfall hervorheben:

I. *Die Cauchysche Multiplikationsregel bleibt noch dann anwendbar, falls die beiden zu multiplizierenden Reihen* Σu_n *und* Σv_n *bloß konvergieren, während außerdem die Reihe mit positiven Gliedern*

$$|v_0 + v_1| + |v_2 + v_3| + |v_4 + v_5| + \cdots \tag{1}$$

konvergiert, und es noch möglich ist eine solche positive ganze Zahl N *zu bestimmen, daß für* $n \geqq N$ *immer gleichzeitig*

$$|u_0 v_{2n} + u_2 v_{2n-2} + \cdots + u_{2n} v_0| < \varepsilon \tag{2}$$

$$|u_1 v_{2n-1} + u_3 v_{2n-3} + \cdots + u_{2n-1} v_1| < \varepsilon \tag{3}$$

werden, indem ε *eine vorgegebene, willkürlich kleine, positive Größe bezeichnet.*

Der im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Beweis läßt sich beinahe wortgetreu hier anwenden; bei unseren Untersuchungen über das Restglied

$$R_n = \sum_{s=1}^{s=n} u_s (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-s+1}) \tag{4}$$

haben wir aber hier die beiden Fälle, wo n gerade oder ungerade ist, für sich zu untersuchen.

Setzt man der Kürze halber

$$\omega_r = v_{2r} + v_{2r+1}, \tag{5}$$

so ergibt sich unmittelbar aus (4)

$$\left\{ \begin{aligned} R_{2n} = v_{2n} \cdot \sum_{p=1}^{p=2n} u_s - \sum_{s=1}^{s=n-1} u_{2s} v_{2n-2s} + \\ + \sum_{p=1}^{p=n-1} (u_{2p} + u_{2p+1})(\omega_{n-1} + \omega_{n-2} + \cdots + \omega_{n-p}); \end{aligned} \right. \tag{6}$$

sondert man in der Tat in (4) zuerst diejenigen Produkte aus, die v_{2n} enthalten, so fehlt für gerade p in den zurückbleibenden Produkten genau das Glied $u_p v_{2n-p}$ um den zu u_p gehörigen Faktor in eine Summe von Zahlen ω_r umzuformen.

Da nun n so groß gewählt werden darf, daß sowohl $|u_{2n}|$ als $|v_{2n}|$ unter jede angebbare Größe hinabsinken, so ist dies auch wegen (2) mit den beiden ersten Summen rechter Hand in (6) der Fall. Was endlich die letzte Summe in dieser Formel betrifft, so kann sie genau mittels des in § 44 entwickelten Verfahrens behandelt werden, weil die Reihe $\Sigma\omega_n$ *unbedingt* konvergiert.

Man hat daher für $n \geqq N$ immer

$$R_{2n} < \varepsilon. \tag{7}$$

Weiter findet man aus (4) in ganz ähnlicher Weise

$$\left\{\begin{aligned} R_{2n+1} &= \sum_{p=0}^{p=n} u_{2p+1} v_{2n-2p} + \\ &+ \sum_{p=1}^{p=n} (u_{2p} + u_{2p+1})(\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_{n-p+1}), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

woraus durch dasselbe Verfahren wie vorher für $n \geqq N$ immer

$$|R_{2n+1}| < \varepsilon \tag{9}$$

folgt; damit ist aber unser Satz bewiesen.

Ganz in ähnlicher Weise ergibt sich, daß die Bedingung (1) durch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} v_{rp} + v_{rp+1} + \cdots + v_{(r+1)p-1} \tag{10}$$

ersetzt werden kann, während die Bedingungen (2) und (3) gleichzeitig durch die $p(p-1)$ folgenden

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (v_{(n-s)p-r} \cdot u_{sp+q}) < \varepsilon \tag{11}$$

für $n \geqq N$ vertreten werden, indem

$$r = 0, 1, 2, \ldots, \quad p-1, \quad q = 1, 2, 3, \ldots, p-1$$

zu setzen ist.

Diese Sätze von Pringsheim sind später von A. Voß[1]) und Cajori[2]) untersucht worden.

Pringsheim[3]) hat den noch allgemeineren Fall untersucht, in welchem die in (10) und (11) auftretende positive ganze Zahl p nicht konstant ist sondern mit dem Stellenzeiger (in (10) r) variiert.

---

117. Es ist die Formel

$$\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

zu beweisen.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 24, p. 42—47; 1884.

2) American Math. Soc. Bull. (2) Bd. 1, p. 180; 1895.

3) Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. I, p. 97.

§ 46. Satz von Pringsheim über alternierende Reihen.

Mit Pringsheim[1]) bemerken wir, daß die in § 45 entwickelten Bedingungen zwar hinreichend aber nicht notwendig sind, und das es wohl als unmöglich bezeichnet werden muß, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, die zwei willkürliche konvergente Reihen befriedigen müssen, um nach der Cauchyschen Regel multipliziert werden zu können, die Bedingungen § 43, IV und § 44, I natürlich ausgenommen.

Für Reihen mit alternierenden Gliedern hat Pringsheim[2]) aber den folgenden Satz bewiesen:

I. *Sind die beiden Zahlenfolgen mit positiven Elementen* $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ *und* $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ *monoton abnehmend und konvergent mit dem Grenzwerte* 0, *so bilden die Beziehungen*

$$\lim_{n=\infty}\left(a_n \cdot \sum_{r=0}^{r=n} b_r\right) = \lim_{n=\infty}\left(b_n \cdot \sum_{r=0}^{r=n} a_r\right) = 0 \tag{1}$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Anwendbarkeit der Cauchyschen Multiplikationsregel auf das Produkt der beiden konvergenten Reihen $\Sigma(-1)^n a_n$ *und* $\Sigma(-1)^n b_n$.

Wenden wir den Satz § 45, I an, so ist die Bedingung § 45, (1) offenbar erfüllt, weil sie nichts anders aussagt, als daß die Reihe Σv_n konvergiert; es bleibt uns also nur übrig die beiden anderen Bedingungen § 45, (2) und (3) zu untersuchen; diese beiden Bedingungen können aber hier durch die folgende

$$a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n} b_0 < \varepsilon \tag{2}$$

für $n \geqq N$ ersetzt werden.

Nun hat man aber offenbar

$$a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_n b_n < b_n(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$a_{n+1} b_{n-1} + a_{n+2} b_{n-2} + \cdots + a_{2n} b_0 < a_n(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n);$$

die Bedingungen (1) sind somit *hinreichend*; daß aber diese Bedingungen *notwendig* sind, liegt auf der Hand; es ist in der Tat offenbar

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 > a_n(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 > b_n(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

---

1) Mathematische Annalen Bd. 21, p. 340; 1883.

2) loc. cit. p. 363.

Wären also die Bedingungen (1) nicht erfüllt, so könnte die Cauchysche Produktreihe nicht konvergieren.

Mit Pringsheim[1]) heben wir noch den spezielleren Satz hervor:

II. *Eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Multiplikation nach der Cauchyschen Regel der beiden alternierenden Reihen im Satze* I *besteht darin, daß die Reihe*

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \tag{3}$$

konvergiert.

Aus der Konvergenz der Reihe (3) folgt nämlich, daß für jedes p und $n \geqq N$ immer

$$a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} < \varepsilon$$

sein muß, und es ist um so mehr für $n \geqq N$ immer

$$\begin{cases} b_{n+p}(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) < \varepsilon \\ a_{n+p}(b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}) < \varepsilon. \end{cases} \tag{4}$$

Da die a_n und die b_n monoton abnehmen, so ist es möglich für ein aufgegebenes n eine solche positive ganze Zahl P zu bestimmen, daß für $p \geqq P$ immer

$$b_{n+p} < b_n^2, \quad a_{n+p} < a_n^2$$

wird; dann ist aber auch

$$b_{n+p} < b_n b_{n-q}, \quad a_{n+p} < a_n a_{n-q},$$

und somit erhält man für $n \geqq N$ immer

$$\begin{cases} b_{n+p}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) < b_n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) < \varepsilon \\ a_{n+p}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) < a_n(a_1 b_1 + a^2 b_2 + \cdots + a_n b_n) < \varepsilon, \end{cases} \tag{5}$$

weil die Reihe (3) konvergiert; durch Addition von (4) und (5) erhält man aber die Bedingungen (1).

Daß die Konvergenz der Reihe (3) aber keine notwendige Bedingung ist, wird durch das Beispiel

$$a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \tag{6}$$

gezeigt; in diesem Falle divergiert sicher die Reihe

$$\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n \log n};$$

andererseits ist aber die Bedingung (1) erfüllt. Setzt man in der Tat

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \cdot \sum_{p=2}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p \log p}},$$

1) loc. cit. p. 364.

so ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\log 2}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und daher hat man

$$A_n < \frac{1}{\sqrt{n\log n}} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{\log n}}; \tag{7}$$

denn es ist, für n positiv ganz, immer

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Für $n = 1, 2$ verifiziert man unmittelbar diese Ungleichung; um die vollständige Induktion durchführen zu können, benutzen wir die andere Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Aus (7) folgt aber, daß die Reihe

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\log n}}$$

nach der *Cauchy*schen Multiplikationsregel quadriert werden darf, obgleich die entsprechende Reihe (3) divergiert.

In diesem Zusammenhang haben wir noch späterer Anwendungen wegen den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

III. *Konvergiert die Reihe* (3), *und setzt man der Kürze halber für jedes* n

$$A_n = a_0 b_n + a_1 b_{n+1} + a_2 b_{n+2} + \cdots + a_p b_{n+p} + \cdots, \tag{8}$$

so ist die Zahlenfolge mit positiven Elementen

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots. \tag{9}$$

monoton abnehmend und konvergent mit dem Grenzwerte 0.

Es liegt auf der Hand, daß die Zahl A_n für jedes n endlich ist; denn die Glieder der Reihe (8) sind sämtlich positiv und nicht größer als die der konvergenten Reihe (3); daß auch für jedes n

$$A_n > A_{n+1} \tag{10}$$

ist, folgt unmittelbar aus der für jedes n richtigen Ungleichung $b_n < b_{n+1}$. Es bleibt uns also nur übrig, den Grenzwert der Zahlenfolge (9) zu bestimmen. Da die Reihe (3) konvergiert, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl P zu bestimmen, daß für $p \geqq P$ immer

$$a_{p+1}b_{p+1} + a_{p+2}b_{p+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

wird; da die b_n monoton abnehmen, hat man daher auch für jedes positive ganze n

$$a_{p+1}b_{n+p+1} + a_{p+2}b_{n+p+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{12}$$

nun verfügen wir über die ganze Zahl n in solcher Weise, daß $b_n < b_p^2$ wird; dadurch erhalten wir um so mehr

$$b_{n+r} < b_p b_r, \quad 0 \leqq r \leqq p,$$

woraus für hinlänglich große p hervorgeht:

$$a_0 b_n + a_1 b_{n+1} + \cdots a_p b_{n+p} < b_p(a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots a_p b_p) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Bestimmt man nun p so, daß die beiden Bedingungen (11) und (13) befriedigt werden, und ist N eine solche Zahl, daß $b_N < b_p^2$ ist, so hat man aus (12) und (13) für $n \geqq N$ immer

$$A_n < \varepsilon, \tag{14}$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Es leuchtet ein, daß die entsprechende Zahlenfolge mit dem allgemeinen Gliede

$$B_n = b_0 a_n + b_1 a_{n+1} + \cdots + b_p a_{n+p} + \cdots \tag{15}$$

genau dieselbe Eigenschaft wie (9) hat.

118. Man soll den Satz § 46, I auf die Reihe in Aufgabe 117 anwenden.

119. Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n \cdots$ eine Zahlenfolge mit positiven Gliedern, die monoton und divergent ist, so daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\varphi_n} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n}{\log n \log_2(n)} = 0$$

ist; dann kann man die beiden alternierenden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\varphi_n}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

nach der Cauchyschen Regel multiplizieren.

120. Satz von Pringsheim[1]). Bedeutet ϱ eine willkürlich kleine angebbare positive Größe, so ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n b_n)^{1+\varrho}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die

1) Mathematische Annalen, Bd. 21, p. 365; 1883.

alternierenden Reihen des Satzes § 46, I nach der Cauchyschen Regel multipliziert werden dürfen.

§ 47. Allgemeine Bemerkungen über Reihenmultiplikation.

Sind die beiden zu multiplizierenden Reihen Σu_n und Σv_n unbedingt konvergent, so konvergiert nicht bloß die Cauchysche Produktreihe Σw_n unbedingt, sondern diejenige Reihe, die man aus ihr erhält, indem man an Stelle eines jeden u_p und v_q ihre absoluten Beträge $|u_p|$ und $|v_q|$ einführt, ist auch konvergent und hat die Summe

$$(1) \qquad \left(\sum |u_n|\right) \cdot \left(\sum |v_n|\right).$$

Bezeichnen daher $p_0 p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$ und $q_0 q_1 q_2 \cdots q_n \cdots$ zwei willkürliche unendliche Folgen beständig wachsender positiver ganzer Zahlen, so ist die Reihe

$$(2) \qquad u_{p_0} v_{q_0} + u_{p_1} v_{q_1} + \cdots + u_{p_n} v_{q_n} + \cdots$$

unbedingt konvergent, und die Summe der absoluten Beträge der Glieder dieser Reihe kann niemals größer als das Produkt (1) sein.

Nach diesen Bemerkungen beweisen wir nunmehr den Satz:

I. *Sind die beiden Reihen Σu_n und Σv_n unbedingt konvergent und enthalten die beiden Zahlenfolgen, jede mit lauter verschiedenen Elementen*

$$p_0 p_1 p_2 \cdots p_m \cdots, \quad q_0 q_1 q_2 \cdots q_m \cdots$$

außer der Null sämtliche positive ganze Zahlen so geordnet, daß, wenn N eine vorgegebene willkürliche positive ganze Zahl bezeichnet, es möglich ist, eine solche positive ganze Zahl M zu bestimmen, daß für $m \geqq M$ immer $p_m + q_m > N$ ist, so hat man immer

$$(3) \qquad \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} v_n\right) = \sum_{m=0}^{m=\infty} u_{p_m} v_{q_m}.$$

Betrachtet man nämlich die Partialsumme

$$S_m = u_{p_0} v_{q_0} + u_{p_1} v_{q_1} + \cdots + u_{p_m} v_{q_m},$$

und enthält sie sämtliche Produkte $u_r v_s$, für welche $r + s \leqq n_1$ ist, aber kein einziges Produkt $u_r v_s$, für welches $r + s > n_2$ ist, und setzt man

$$w'_p = |u_0 v_p| + |u_1 v_{p-1}| + \cdots + |u_p v_0|,$$

so hat man offenbar

$$\left|\sum_{q=0}^{q=n_1} w_q - S_m\right| \leqq \sum_{n=n_1+1}^{n=n_2} w'_n.$$

In diesem Falle stellt die Cauchysche Multiplikationsregel also

nur eine einzige der unzähligen Formen der unbedingt konvergenten Produktreihe (3) dar.

Wenn die Cauchysche Multiplikationsregel zwar anwendbar ist, aber mindestens eine der zu multiplizierenden Reihen nur bedingt konvergiert, so bleibt die Formel (3) nicht mehr allgemein gültig; wir können in diesem Falle nur sagen, daß die Cauchysche Regel jedenfalls eine der möglichen Formen der Produktreihe liefert.

Der Satz von Abel kann natürlich nicht dahin erweitert werden, daß wir behaupten dürfen, die Formel (3) bleibe richtig, wenn nur die Reihe rechter Hand konvergiert; auch der Satz von Cesàro kann hinfällig werden, wenn wir die Cauchysche Produktreihe verlassen.

Nach H. Bohr, der allgemeine Untersuchungen[1]) über diese Frage angestellt hat, betrachten wir die Produktreihe

$$(4) \qquad (\sum u_n)(\sum v_n) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n + \cdots,$$

wo allgemein

$$\omega_0 = w_0, \quad \omega_n = w_{2n-1} + w_{2n}$$

gesetzt worden ist; die Formel (4) ist dem Abelschen Satze zufolge richtig, wenn die Reihe rechter Hand konvergiert.

Da in ω_n das Glied u_p mit der Summe $v_{2n-p-1} + v_{2n-p}$ multipliziert vorkommt, so hat man für die Partialsumme

$$\Omega_n = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$$

den Ausdruck

$$(5) \qquad \Omega_n = u_0 t_{2n} + u_1 t_{2n-1} + \cdots + u_p t_{2n-p} + \cdots + u_{2n} t_0,$$

wo der Kürze halber

$$t_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

gesetzt worden ist; aus (5) erhält man daher

$$(6) \sum_{p=0}^{p=n} \Omega_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_{2p}(t_0 + t_2 + \cdots + t_{2n-2p}) + \sum_{p=0}^{p=n-1} u_{2p+1}(t_1 + t_3 + \cdots + t_{2n-2p-1}).$$

Setzen wir nun

$$u_0 = 0, \quad u_{2p-1} = a_p, \quad u_{2p} = -a_p; \quad v_0 = 0, \quad v_{2p-1} = b_p, \quad v_{2p} = -b_p,$$

wo die a_n und b_n sämtlich positiv sind, so daß die beiden Zahlenfolgen

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots, \quad b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$$

monoton abnehmend sind und beide den Grenzwert 0 haben, so ist

1) Man vergleiche auch Stieltjes in Nouvelles Annales d. Math. (3), Bd. 6, p. 210.

offenbar

$$s_{2n-1} = a_n, \quad s_{2n} = 0, \quad t_{2n-1} = b_n, \quad t_{2n} = 0$$

und

$$s = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = 0, \quad t = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n = 0.$$

In diesem Falle hat man weiter wegen (6)

$$\Omega_0 + \Omega_1 + \cdots + \Omega_n = \sum_{p=1}^{p=n} a_p(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-p+1}),$$

woraus unmittelbar folgt:

(7) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > \Omega_0 + \Omega_1 + \cdots + \Omega_n,$

und indem $1 \leqq m \leqq n$ angenommen wird, erhält man:

(8) $\Omega_0 + \Omega_1 + \cdots + \Omega_n > (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-m+1}).$

Es sei nun weiter speziell $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und

$a_1 = 1, \quad a_r = r^{1-\alpha} - (r-1)^{1-\alpha}, \quad b_1 = 1, \quad b_r = r^{1-\beta} - (r-1)^{1-\beta};$

dann hat man wegen § 24, (19)

$$a_r = r^{1-\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{1-\alpha}\right) = \frac{1-\alpha}{r^{\alpha}} + \frac{k}{r^{1+\alpha}}$$

$$b_r = \frac{1-\beta}{r^{\beta}} + \frac{k'}{r^{1+\beta}},$$

wo k und k' immer endlich sind, woraus

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0$$

hervorgeht; weiter hat man für positive ganze r

(9) $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = r^{1-\alpha}, \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_r = r^{1-\beta},$

woraus wegen (7) und (8)

(10) $$n^{1-\alpha-\beta} > \frac{\Omega_0 + \Omega_1 + \cdots + \Omega_n}{n} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2-\beta+\alpha} \cdot n^{1-\alpha-\beta}$$

folgt, indem man in (8) m in solcher Weise bestimmt, daß

$$\frac{n}{2} + 1 \geqq m > \frac{n}{2}, \quad n - m + 1 > \frac{n}{2}$$

wird.

Aus (10) ergibt sich dann unmittelbar, daß die Produktreihe (4) in diesem Falle nur dann summierbar mit der Mittelsumme 0 ist, wenn $\alpha + \beta > 1$ angenommen wird; hat man nämlich $\alpha + \beta < 1$, so

ergibt sich

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\Omega_0+\Omega_1+\cdots+\Omega_n}{n}\right)=\infty,$$

und nimmt man $\alpha+\beta=1$ an, so ist für jedes n immer

$$1>\frac{\Omega_0+\Omega_1+\cdots+\Omega_n}{n}>\frac{1}{2}.$$

Kapitel XI.

Transformation von Reihen.

§ 48. Methode von Euler und Markoff.

Wenn von der unendlichen Reihe

$$s=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots. \tag{1}$$

bekannt ist, daß sie konvergiert, so reicht dies im allgemeinen für die theoretischen Anwendungen dieser Reihe aus; ganz anders verhält sich aber die Sache, wenn die Reihensumme s durch Ausrechnung der einzelnen Glieder annäherungsweise berechnet werden soll. In diesem Falle kommt es vor allem darauf an, daß die Reihe rasch konvergiert, d. h. daß die Reihenglieder ihren absoluten Beträgen nach stark abnehmen.

Beispiel 1. Die Reihe von Gregory[1]), im allgemeinen von Leibniz[2]) genannt,

$$a=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots, \tag{2}$$

ist zwar konvergent, aber so langsam, daß man nach Poncelet[3]) ungefähr 50000 Glieder ausrechnen muß, wenn der so begangene Fehler nicht 0,0001 übersteigen darf.

Beispiel 2. Um die Reihensumme

$$s_3=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots \tag{3}$$

mit 14 richtigen Dezimalstellen zu berechnen, muß man nach Kummer[4]) mehr als 10 Millionen Glieder mitnehmen.

Beispiel 3. Um die Catalansche Konstante[5]) G mittels der

1) Brief nach Collins vom 15. Februar 1671. Commercium epistolicum, p. 79—80.

2) Brief vom 17. August 1676. Werke, Bd. I, p. 117.

3) Journal für Mathematik, Bd. 13, p. 17; 1835.

4) Journal für Mathematik, Bd. 16, p. 211; 1837.

5) Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies, p. 33—50. Mém. couronnés et de sav. étrangers de Belgique, Bd. 33; Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg. Bd. 31, Nr. 3; 1883.

Reihenentwicklung

$$G = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots \tag{4}$$

mit 26 richtigen Dezimalstellen berechnen zu können, muß man nach Bresse[1]) mehr als 1080 Billionen Glieder ausrechnen.

Es liegt demnach auf der Hand, daß eine annäherungsweise Berechnung der drei angegebenen Reihen durch direkte Anwendung dieser Reihen als praktisch undurchführbar bezeichnet werden muß. Will man eine solche Berechnung möglich machen, muß man daher die vorgelegten Reihen in stärker konvergierende umformen.

Solche Reihentransformationen sind schon von Stirling[2]) und Euler[3]) angegeben worden; in der neuesten Zeit hat Markoff[4]) die Eulersche Methode erheblich verallgemeinert und zwar in folgender Weise:

Es seien für $p = 0, 1, 2, \cdots, n$ und $q = 0, 1, 2, 3, \cdots, m$ die $(n+1)(m+1)$ Größen $A_{p,q}$ und $B_{p,q}$ in solcher Weise definiert, daß für jedes p und q

$$A_{p,q} - A_{p+1,q} = B_{p,q} - B_{p,q+1} = C_{p,q} \tag{5}$$

ist; dann hat man erstens für ein bestimmtes q, indem man in (5) nacheinander $p = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ einführt und sämtliche Gleichungen addiert

$$A_{0,q} - A_{n,q} = C_{0,q} + C_{1,q} + \cdots + C_{n-1,q} = \sum_{r=0}^{r=n-1} C_{r,q}, \tag{6}$$

woraus, indem man in (6) $q = 0, 1, 2, \cdots m-1$ setzt und addiert, hervorgeht:

$$\sum_{q=0}^{q=m-1} A_{0,q} - \sum_{q=0}^{q=m-1} A_{n,q} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{q=0}^{q=m-1} C_{r,q}. \tag{7}$$

Aus (5) findet man in ähnlicher Weise die mit (6) analoge Formel

$$B_{p,0} - B_{p,m} = C_{p,0} + C_{p,1} + \cdots + C_{p,m-1} = \sum_{s=0}^{s=m-1} C_{p,s}, \tag{8}$$

und somit hat man auch

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} B_{r,0} - \sum_{r=0}^{r=n-1} B_{r,m} = \sum_{p=0}^{p=n-1} \sum_{q=0}^{q=m-1} C_{p,q}, \tag{9}$$

1) Comptes rendus, Bd. 64, p. 1141; 1867.
2) Methodus differentialis. London 1730.
3) Institutiones calculi differentialis, p. 281 ff.; 1755.
4) Differenzenrechnung, p. 178—180; 1896.

woraus wegen (7) die neue Identität

$$\sum_{r=0}^{r=m-1} A_{0,r} - \sum_{r=0}^{r=m-1} A_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=n-1} B_{s,0} - \sum_{s=0}^{s=n-1} B_{s,m} \tag{10}$$

hervorgeht, und demnach ergibt sich unmittelbar der folgende Satz von Markoff:

I. *Wenn die beiden Grenzwerte*

$$A = \lim_{n=\infty,\ m=\infty} \sum_{r=0}^{r=m-1} A_{n,r}, \quad B = \lim_{m=\infty,\ n=\infty} \sum_{s=0}^{s=n-1} B_{s,m} \tag{11}$$

endlich und bestimmt sind, so hat man

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} A_{0,r} = \sum_{s=0}^{s=\infty} B_{s,0} + A - B, \tag{12}$$

vorausgesetzt, daß jedenfalls eine der in (12) *vorkommenden unendlichen Reihen konvergiert.*

Um nun aus (12) die Eulersche Formel herzuleiten, setzen wir mit Markoff:

$$A_{p,q} = \alpha^q \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \Delta^p a_q, \quad B_{p,q} = \frac{A_{p,q}}{1-\alpha}, \tag{13}$$

wo $\Delta^0 a_q = a_q$, $\Delta^1 a_q = a_{q+1} - a_q$ und allgemein

$$\Delta^p a_q = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} a_{p+q-s} \tag{14}$$

gesetzt worden ist; aus (14) ergibt sich dann ohne Mühe die Identität

$$\Delta^{p+1} a_q = \Delta^p a_{q+1} - \Delta^p a_q. \tag{15}$$

Die Annahmen (13) liefern ohne weiteres die beiden Differenzen

$$A_{p,q} - A_{p+1,q} = \alpha^q \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \left(\Delta^p a_q - \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \Delta^{p+1} a_q\right)$$

$$B_{p,q} - B_{p,q+1} = \alpha^q \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \left(\frac{\Delta^p a_q}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \Delta^p a_{q+1}\right),$$

die offenbar wegen (15) einander gleich sind, und demnach erhält man wegen (10)

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{q=0}^{q=m-1} a_q \alpha^q - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \cdot \sum_{q=0}^{q=m-1} \Delta^n a_q \cdot \alpha^q = \\ &\quad = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \cdot \Delta^p a_0 - \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \Delta^p a_m; \end{aligned} \right. \tag{16}$$

für $m = \infty$, $n = \infty$ ist diese Formel ohne Berücksichtigung der entsprechenden Bedingungen (11) von Euler angegeben worden; die erste genaue Untersuchung dieser Transformation rührt aber von Poncelet[1]) her.

Mit Euler[2]) wollen wir die Formel (16) auf die Gregorysche Reihe (2) anwenden; wir haben dann

$$\alpha = -1, \quad a_q = \frac{1}{2q+1}$$

einzuführen; aus (15) finden wir nun weiter ohne Mühe

$$\Delta^p a_q = (-1)^p \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p}{(2q+1)(2q+3)\cdots(2p+2q+1)},$$

woraus wegen (16) folgt:

$$\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{(-1)^q}{2q+1} - (-1)^n \cdot \sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(2q+1)(2q+3)\cdots(2q+2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)} - \frac{(-1)^m}{2} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2p+1)}.$$

Nun hat man aber

$$\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(2q+1)(2q+3)\cdots(2q+2n+1)} < \frac{1}{2n+1}\left(1 + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(2q+1)(2q+3)\cdots(2q+2n-1)}\right)$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2p+1)} < \frac{1}{2m+1}\left(1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{(2m+3)\cdots(2m+2p+1)}\right);$$

da die Reihen rechter Hand in diesen Ungleichungen für jedes m und n konvergieren, so hat man schließlich die Identität

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{q!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2q+1)}.$$

1) Journal für Mathematik Bd. 13, p. 1—54; 1835.
2) Institutiones calculi differentialis, p. 295; 1755.

121. Es ist die Formel

$$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2^p}$$

zu beweisen (Euler[1]).

122. Man hat die Formel

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{p!}{x(x+1)\cdots(x+p)} \cdot \frac{1}{2^{p+1}}$$

zu beweisen, und denjenigen Bereich der x-Ebene, in welchem sie anwendbar ist, zu bestimmen.

§ 49. Methode von Kummer.

Dem bei seinem Konvergenzsatze angewandten Beweisverfahren folgend, hat Kummer[2]) eine Reihentransformation, die in den folgenden Satz gipfelt, angegeben:

I. *Wenn die unendliche Reihe*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

konvergiert, und die Zahlenfolge

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{2}$$

so bestimmt ist, daß erstens die Zahlenfolge

$$\alpha_0 u_0, \alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \ldots, \alpha_n u_n, \ldots \tag{3}$$

konvergiert, und daß zweitens die andere Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ *mit dem allgemeinen Gliede*

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{4}$$

mit einem von Null verschiedenen Grenzwerte A konvergiert, so hat man

$$s = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(1 - \frac{a_p}{A}\right) u_p + \frac{\alpha_0 u_0 - \omega}{A}, \tag{5}$$

wo ω *den Grenzwert der Fundamentalreihe* (3) *bezeichnet.*

Aus (4) erhält man in der Tat für jedes p

$$a_p u_p = \alpha_p u_p - \alpha_{p+1} u_{p+1},$$

woraus, indem man $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ einführt und sämtliche Glei-

1) loc. cit. p. 294.

2) Journal für Mathematik Bd. 16, p. 206—214; 1837.

chungen addiert, hervorgeht:

$$\sum_{p=0}^{p=n} a_p u_p = \alpha_0 u_0 - \alpha_{n+1} u_{n+1}, \tag{6}$$

dividiert man demnach (6) mit A, und subtrahiert man die so erhaltene Gleichung von der folgenden

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n = s_n,$$

so hat man für jedes n

$$s_n = \frac{\alpha_0 u_0 - \alpha_{n+1} u_{n+1}}{A} + \sum_{p=0}^{p=n} \left(1 - \frac{a_p}{A}\right) u_p,$$

woraus die Formel (5) unmittelbar hergleitet werden kann, wenn man die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen läßt.

Die durch die Kummersche Transformation erhaltene Verstärkung der Konvergenz ist in dem der Null zustrebenden Faktor

$$1 - \frac{a_p}{A}$$

zu suchen; die von Kummer geforderte Bedingung

$$\omega = \lim_{n=\infty} (\alpha_n u_n) = 0 \tag{7}$$

ist somit auch nicht hier notwendig, kann aber doch häufig ohne Schwierigkeit erfüllt werden.

Die Kummersche Transformation mit der nicht notwendigen Bedingung (7) ist später von Leclert wiedergefunden und in einer Abhandlung von Catalan[1]) publiziert worden.

Da die Zahlenfolge (2) nur den beiden oben angegebenen Bedingungen zu genügen hat, so liegt auf der Hand, daß die Kummersche Transformation eine sehr allgemeine ist.

Wir wollen die Gregorysche Reihe § 48, (2) durch die Formel (5) transformieren und setzen zu diesem Zwecke $\alpha_n = 1$; dadurch ergibt sich

$$\omega = 0, \quad a_n = 1 + \frac{2n-1}{2n+1}, \quad A = 2, \quad 1 - \frac{a_n}{A} = \frac{1}{2n+1},$$

und somit finden wir

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}. \tag{8}$$

1) Mémoire sur la transformation des séries, p. 4. Mém. cour. et de savants étrangers de Belgique Bd. 33. 1865

Wenden wir die Methode noch einmal an, indem wir nun

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2n-1}$$

setzen, so erhalten wir

$$\omega = 0, \quad a_n = 2 \cdot \frac{4n^2+1}{4n^2-1}, \quad A = 2, \quad \left(1 - \frac{a_n}{A}\right) u_n = \frac{(-1)^n 2}{(4n^2-1)^2}$$

und dadurch die neue Formel

$$(9) \qquad \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2}.$$

Weiter setzen wir

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2n-3}$$

und erhalten dann in ähnlicher Weise

$$(10) \qquad \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1} = \frac{4}{3} + 24 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2 (4n^2-9)}.$$

Da die Reihe rechter Hand in (17) auch alternierend ist, so bemerken wir mit Catalan[1]), daß der durch die vier ersten Glieder dieser Reihe erhaltene Annäherungswert mit einem Fehler kleiner als dem fünften Gliede

$$\frac{8}{99 \cdot 33 \cdot 91} < 0{,}00003$$

behaftet ist.

Um die große Biegsamkeit der Kummerschen Transformation noch deutlicher hervorzuheben, schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

und setzen demnach

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2n-1};$$

dadurch erhalten wir

$$a_n = \frac{4n}{2n-1}, \quad A = 2, \quad \omega = 0$$

und die Entwicklung

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)};$$

1) loc. cit. p. 9.

weiter setzen wir

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \alpha_n = \frac{2n+3}{2n-1}$$

und erhalten somit in ähnlicher Weise

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{30} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)},$$

woraus wegen (11) das schließliche Resultat hervorgeht:

$$(12) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{4}{5} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

123. Setzt man

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \alpha_n = \frac{2n-1}{2n-3},$$

so hat man für die Catalansche Konstante § 48, (4) die Entwicklung von Leclert[1])

$$G = \frac{5}{6} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}.$$

124. Man soll die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ zum wiederholten Male transformieren, indem man stets $u_0 = 0$, $\alpha_n = n$ setzt.

§ 50. Änderungen der Kummerschen Methode.

Leclert[2]) hat eine Umformung der Kummerschen Transformation angegeben, indem er den folgenden Satz bewiesen hat:

I. *Mit denselben Bezeichnungen und unter denselben Voraussetzungen wie in* § 49, I *hat man die Entwicklung:*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = u_0 + \frac{\alpha_1 u_1}{a_1} - \frac{\omega}{A} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{1}{a_{p+1}} - \frac{1}{a_p}\right) \alpha_{p+1} u_{p+1}.$$

Ordnet man in der Tat die Summe

$$(2) \qquad \Omega = \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{1}{a_{p+1}} - \frac{1}{a_p}\right) \alpha_{p+1} u_{p+1}$$

nach den $1 : a_n$, so hat man

$$(3) \qquad \Omega = -\frac{\alpha_2 u_2}{a_1} + \frac{\alpha_{n+1} u_{n+1}}{a_{n+1}} + \sum_{p=2}^{p=n} \frac{1}{a_p} (\alpha_p u_p - \alpha_{p+1} u_{p+1});$$

1) Zitierte Abhandlung von Catalan, p. 20.
2) Zitierte Abhandlung von Catalan, p. 7.

nun ist aber wegen § 49, (4)

$$\alpha_p u_p - \alpha_{p+1} u_{p+1} = a_p u_p, \quad u_1 = \frac{\alpha_1 u_1}{a_1} - \frac{\alpha_2 u_2}{a_1},$$

woraus wegen (2) und (3) folgt:

$$(4) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{1}{a_{p+1}} - \frac{1}{a_p}\right) \alpha_{p+1} u_{p+1} = \frac{\alpha_{n+1} u_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{\alpha_1 u_1}{a_1} - u_0 + s_n,$$

und somit ergibt sich die Formel (1) unmittelbar, wenn man in (4) n über jede Grenze hinauswachsen läßt.

Um diese Transformation auf die Reihe von Gregory § 48, (2) anwenden zu können, setzen wir

$$u_0 = 0, \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \alpha_n = 1,$$

woraus

$$a_n = \frac{4n}{2n+1}, \quad \omega = 0, \quad A = 2$$

hervorgeht, und somit erhält man die Formel

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Die Reihe rechter Hand wird nunmehr durch die Annahmen

$$u_0 = 0, \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)}, \quad \alpha = \frac{2n+1}{n-1}$$

transformiert, und somit ergibt sich die Entwicklung von Leclert[1]):

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{19}{24} - \frac{9}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)(2n+1)^2(2n+3)^2}.$$

125. Man soll die unendliche Reihe Σn^{-2} unter den Annahmen $u_0 = 0$, $\alpha_n = n$ und demnach die so erhaltene Reihe unter den Annahmen $u_0 = 0$, $\alpha_n = n + 1$ transformieren.

126. Man hat die unendliche Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots,$$

indem man $u_0 = 0$, $\alpha_n = 1$ einführt, zu transformieren.

1) Zitierte Abhandlung von Catalan, p. 10.

Kapitel XII.

Über Reihen mit positiven Gliedern.

§ 51. Ergänzung eines Satzes von Abel.

Durch die in § 37 wiedergelegte, weder notwendige noch hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe mit positiven Gliedern Σu_n, nämlich

$$\lim_{n=\infty}(u_n \cdot n) = 0$$

angeregt bewies Abel[1]) einen Satz, der folgendermaßen von Pringsheim[2]) ergänzt worden ist:

I. *Es gibt keine divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{1}$$

so daß die Beziehung

$$\limsup_{n=\infty}(\varphi_n \cdot a_{n+p}) = G < \infty \tag{2}$$

eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe mit positiven Gliedern Σa_n bildet. Vielmehr kann man zu jeder beliebigen vorgelegten Zahlenfolge der Art (1) *die Glieder jeder konvergenten Reihe Σa_n (mit positiven Gliedern) so anordnen, daß der* lim sup *in* (2) *den Wert ∞ annimmt.*

Zerlegen wir in der Tat die aus den Reihengliedern a_n gebildete Zahlenfolge in zwei andere

$$a_0', a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots \tag{3}$$

$$a_0'', a_1'', a_2'', \ldots, a_n'', \ldots, \tag{4}$$

dann sind die beiden Reihen mit positiven Gliedern $\Sigma a_n'$ und $\Sigma a_n''$ sicher konvergent. Bezeichnet weiter

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \tag{5}$$

eine monoton abnehmende Zahlenfolge mit positiven Elementen, so ist es möglich, eine solche unendliche Folge immer wachsender positiver ganzer Zahlen

$$n_0, n_1, n_2, \ldots, n_\lambda, \ldots \tag{6}$$

zu bestimmen, daß für jedes λ immer

$$a_\lambda' \geq \frac{1}{\varepsilon_\lambda \varphi_{n_\lambda}} \tag{7}$$

wird; denn die Zahlenfolge (1) ist ja divergent.

1) Journal für Mathematik Bd. 3, p. 80; 1827. Œuvres, Bd. I, p. 401.

2) Mathematische Annalen Bd. 35, pp. 344, 357; 1890.

Bestimmen wir nun eine Reihe mit positiven Gliedern Σu_n so daß $u_{n_\lambda+p} = a'_\lambda$ aber $u_\varrho = a''_\varrho$ für $\varrho \neq n_\lambda + p$ ist, so ist diese Reihe Σu_n konvergent und hat dieselbe Summe wie die vorgegebene Σa_n, weil sie aus jener durch Umordnung der Reihenglieder gebildet worden ist. Es ist aber

$$\varphi_{n_\lambda} u_{n_\lambda+p} = \varphi_{n_\lambda} a'_\lambda \geq \frac{1}{\varepsilon_\lambda}; \tag{8}$$

verfügt man daher über die Zahlenfolge (5), so daß sie den Grenzwert Null hat, so hat für unsere Σu_n der lim sup $\varphi_{n_\lambda} u_{n_\lambda+p}$ den Wert $+\infty$.

Weiter haben wir den Satz:

II. *Es gibt keine Zahlenfolge mit positiven Elementen*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots, \tag{9}$$

von der Beschaffenheit, daß die Beziehung

$$\liminf_{n=\infty} (\varphi_n a_{n+p}) = g > 0 \tag{10}$$

eine notwendige Bedingung für die Divergenz der Reihe mit positiven Gliedern Σa_n bildet. Vielmehr kann man für jede Zahlenfolge der Art (9) *die Glieder einer divergenten Reihe Σa_n mit positiven schließlich verschwindenden Gliedern so anordnen, daß der* lim inf *in* (10) *den Wert Null hat.*

Da $\lim a_n = 0$ für $n = \infty$ ist, so liegt es auf der Hand, daß die Zahlenfolge (9) jedenfalls divergieren muß, wenn die Bedingung (10) erfüllt werden soll; man kann daher die Folge (6) so bestimmen, daß die entsprechende Folge

$$\frac{1}{\varphi_{n_0}}, \frac{1}{\varphi_{n_1}}, \frac{1}{\varphi_{n_2}}, \cdots, \frac{1}{\varphi_{n_\lambda}}, \cdots, \tag{11}$$

die den Grenzwert Null hat, monoton abnehmend wird. Weiter zerlegen wir die aus den Reihengliedern a_n gebildete Zahlenfolge in die zwei anderen (3) und (4), so daß die Elemente in (3) für jedes λ der Bedingung

$$a'_\lambda < \frac{\varepsilon_\lambda}{\varphi_{n_\lambda}} \tag{12}$$

genügen, indem die monoton abnehmende Zahlenfolge (5) so gewählt wird, daß sie den Grenzwert Null hat.

Weiter setzen wir wie vorher $u_{n_\lambda+p} = a'_\lambda$ und $u_\varrho = a''_\varrho$ für $\varrho \neq n_\lambda + p$; dann ist wegen (12)

$$\lim_{\lambda=\infty} (\varphi_{n_\lambda} u_{n_\lambda+p}) = 0 \tag{13}$$

und der lim inf in (10) hat demnach auch den Wert Null.

Über diese Verhältnisse beweisen wir noch mit Pringsheim[1]) den folgenden speziellen Satz:

III. *Wenn die divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen* (1) *monoton wachsend ist, während die positiven Glieder der Reihe* Σa_n *monoton abnehmen, so ist die Beziehung*

$$\lim_{n=\infty} (\varphi_n a_n) = 0 \tag{14}$$

dann und nur dann eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe Σa_n, *wenn*

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\varphi_n}{n} \tag{15}$$

endlich ist.

Konvergiert die Reihe Σa_n, so ist für $n \geqq N$ und für jedes p immer

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

woraus speziell für $p = n$ folgt:

$$n a_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon, \quad 2n a_{2n} < 2\varepsilon;$$

da außerdem

$$(2n+1) a_{2n+1} < \frac{2n+1}{2n} \cdot 2n a_{2n} < \left(2 + \frac{1}{n}\right) \varepsilon$$

ist, so folgt allgemein

$$\lim_{n=\infty} (n \cdot a_n) = 0, \quad \lim_{n=\infty} (n \cdot a_{n+p}) = 0,$$

indem p positiv ganz ist, woraus wegen (15) die Bedingung (14) sich als *notwendig* für die Konvergenz der Reihe Σa_n ergibt.

Wenn aber die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Gliede $\varphi_n : n$ divergiert, so zeigen wir nach Pringsheim[2]) durch das folgende Beispiel, daß die Bedingung (14) nicht notwendig für die Konvergenz der Reihe Σa_n sein kann.

Es seien $a > 1$, $r > 0$, $s > 0$, während m_n die größte positive

1) loc. cit. p. 341.
2) loc. cit. p. 349.

ganze Zahl, die $a^{n^{r+s}}$ nicht übersteigt, bezeichnet; bilden wir dann die Glieder einer Reihe Σu_n aus den Ausdrücken

$$(16) \qquad \frac{1+\frac{1}{1}}{n^r a^{n^{r+s}}}, \quad \frac{1+\frac{1}{2}}{n^r a^{n^{r+s}}}, \quad \cdots, \quad \frac{1+\frac{1}{m_n}}{n^r a^{n^{r+s}}},$$

wo n sämtliche positive ganze Zahlen durchlaufen soll, so besitzt diese Reihe die folgenden Eigenschaften:

1. Die Glieder dieser Reihe bilden eine monoton abnehmende Zahlenfolge mit dem Grenzwerte 0.

2. Die Reihe konvergiert für $r > 1$, ist aber für $r \leq 1$ divergent; für die Summe ω_n der m_n Glieder in (16) hat man in der Tat

$$\omega_n < \frac{2m_n}{n^r a^{n^{r+s}}} \leq \frac{2}{n^r}$$

$$\omega_n > \frac{m_n}{n^r a^{n^{r+s}}} \geq \frac{1}{n^r} \cdot \frac{a^{n^{r+s}}-1}{a^{n^{r+s}}},$$

woraus die Konvergenz oder Divergenz der Reihe Σu_p deutlich hervorgeht, je nachdem $r > 1$ oder $r \leq 1$ angenommen wird.

3. Bezeichnet N_n den Stellenzeiger des letzten in (16) vorkommenden Gliedes in Σu_p, so ist

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} (N_n \log N_n \cdot u_{N_n}) = \infty.$$

Da die Anzahl der in (16) vorkommenden Reihenglieder jedenfalls nicht kleiner als $a^{n^{r+s}} - 1$ sein kann, so hat man

$$N_n > a^{n^{r+s}}, \quad \log N_n > n^{r+s} \log a,$$

woraus unmittelbar hervorgeht:

$$(18) \qquad N_n \log N_n \cdot u_{N_n} > n^s \cdot \log a.$$

4. Bezeichnet M_n den Stellenzeiger des ersten Gliedes in (16), so ist

$$(19) \qquad \lim_{n=\infty} (M_n \log M_n \cdot u_{M_n}) = 0.$$

Man findet in der Tat wie vorher

$$M_n \leq 1 + a^{1^{r+s}} + a^{2^{r+s}} + \cdots + a^{(n-1)^{r+s}},$$

woraus, indem $a > 1$ ist, und wenn man anstatt der Summe rechter Hand sämtliche Glieder der geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede 1 und dem Quotienten a einführt, folgt:

$$M_n < \frac{a^{(n-1)^{r+s}+2} - 1}{a - 1} = K \cdot a^{(n-1)^{r+s}},$$

wo K für jedes n endlich und von Null verschieden bleibt; es ist demnach auch

$$\log M_n = (n-1)^{r+s} \cdot L,$$

wo L dieselbe Eigenschaft wie früher K besitzt; dadurch erhält man aber schließlich, indem P stets endlich bleibt,

$$M_n \log M_n \cdot u_{M_n} < P \cdot \frac{(n-1)^{r+s}}{n^r} \cdot \frac{a^{(n-1)^{r+1}}}{a^{n^{r+s}}}, \tag{20}$$

und daraus folgt unmittelbar die Gleichung (19).

Es existieren daher konvergente Reihen mit positiven immer abnehmenden Gliedern Σu_n, für welche

$$\limsup_{n=\infty} (n \log n \cdot u_n) = \infty$$

und wegen § 37, VI divergente Reihen mit positiven stets abnehmenden Gliedern Σu_n, für welche

$$\lim_{n=\infty} (n \log n \cdot u_n) = 0$$

ist.

§ 52. Über die logarithmischen Kriterien.

Aus den Formeln § 51, (18) und (20) geht deutlich hervor, daß konvergente und divergente Reihen existieren, für welche sämtliche in § 41 entwickelte logarithmische Kriterien versagen.

Um diese Verhältnisse weiter aufzuklären und eine nicht ganz genaue Bemerkung von Bonnet in helles Licht zu stellen, setzt Pringsheim[1])

$$e_0 = e^0 = 1, \quad e_1 = e^{e_0}, \quad e_2 = e^{e_1}, \ldots, \quad e_n = e^{e_{n-1}}, \ldots,$$

so daß für den iterierten Logarithmus

$$\log_r (e_n) = e_{n-r}, \quad r \leqq n$$

sein muß; es sei demnach die positive ganze Zahl α_n in solcher Weise definiert, daß $\alpha_n = m$ ist, wenn $e_m < n < e_{m+1}$ vorausgesetzt wird; diese Zahl α_n bleibt daher konstant, wenn n sich zwischen zwei Grenzen von der Form e_m und e_{m+1} bewegt, und wächst um eine Einheit, wenn n den Wert e_{m+1} überschreitet; hieraus folgt, daß α_n mit n über jede Grenze hinaus wachsen muß.

Andererseits läßt sich aber zeigen, daß α_n, von einer jedesmal anzugebenden Stelle ab, langsamer zunimmt als der iterierte Logarithmus $\log_r(n)$ für einen beliebig groß vorgeschriebenen Wert von r.

1) loc. cit. p. 353.

Bezeichnet nämlich s eine gewisse positive ganze Zahl, und bestimmt man n so, daß

$$e_{r+s} < n < e_{r+s+1}, \quad \alpha_n = r + s$$

ist, dann ergibt sich

$$\log_r(n) > \log_r(e_{r+s}) = e_s,$$

und demnach erhält man

$$\frac{\log_r(n)}{\alpha_n} > \frac{e_s}{r+s}, \tag{1}$$

wo der Bruch rechter Hand offenbar, wie groß r auch angenommen wird, ohne Grenze mit n (und s) wachsen muß.

Wir setzen nun allgemein

$$L_r(n) = n \log n \log_1(n) \log_2(n) \ldots \log_r(n) \tag{2}$$

und bilden die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\omega_n = \frac{1}{L_{\alpha_n}(n)\alpha_n^{\sigma}}; \tag{3}$$

dann ist offenbar, wie groß die positive ganze Zahl r auch angenommen wird,

$$\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} (L_r(n) \cdot \omega_n) = 0 \\ \lim\limits_{n=\infty} (L_r(n) (\log_r(n))^{\sigma} \omega_n) = \infty, \quad \sigma > 0; \end{cases} \tag{4}$$

denn es ist in der Tat wegen (3)

$$L_r(n)\omega_n = \frac{1}{\log_{r+1}(n) \log_{r+2}(n) \cdots \log_{\alpha_n}(n) \cdot \alpha_n^{\sigma}}$$

$$L_r(n) (\log_r(n))^{\sigma} \omega_n = \frac{(\log_r(n))^{\sigma}}{\log_{r+1}(n) \log_{r+2}(n) \cdots \log_{\alpha}(n) \cdot \alpha_n^{\sigma}}.$$

Die durch (3) bestimmten Reihenglieder reagieren somit auf keines der logarithmischen Kriterien.

Um die Reihe $\Sigma\omega_n$ zu untersuchen, sammeln wir diejenigen ihrer Glieder, für welche α_n denselben Wert m hat, es ist also für diese Glieder immer $e_m < n < e_{m+1}$; definieren wir demnach die positiven ganzen Zahlen a und b so, daß

$$a - 1 < e_m < a, \quad b < e_{m+1} < b + 1$$

ist, so hat man daher

$$\sum_{n=a}^{n=b} \omega_n = \frac{1}{m^r} \cdot \sum_{n=a}^{n=b} \frac{1}{L_m(n)}. \tag{5}$$

Setzen wir demnach in die Ungleichungen § 23, (9)

$$\log_{m+1}(n) - \log_{m+1}(n) \geqq \frac{1}{L_m(n)} \geqq \log_{m+1}(n+1) - \log_{m+1}(n)$$

nacheinander a, $a+1$, $a+2, \cdots, b$ anstatt n, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Relationen

$$\sum_{n=a}^{n=b} \frac{1}{L_m(a)} \geqq \log_{m+1}(e_{m+1}+1) - \log_{m+1}(e_m+1),$$

$$\sum_{n=a}^{n=b} \frac{1}{L_m(a)} \leqq \log_{m+1}(e_{m+1}) - \log_{m+1}(e_m) = 1;$$

setzt man daher wegen (5)

$$\sum_{n=a}^{n=b} \omega_n = \frac{\delta_m}{m^r},$$

so ist die Zahlenfolge

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_m, \ldots$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte 1; da nun

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \omega_n = \sum_{m=1}^{n=\infty} \frac{\delta_m}{m^r}$$

sein muß, so erhalten wir das Ergebnis:

Die Reihe $\Sigma\omega_n$ konvergiert oder divergiert, je nachdem $r > 1$ oder $r \leqq 1$ angenommen wird.

Von den beiden Reihen

$$(6) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{L_{\alpha_n}(n)\alpha_n}, \quad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{L_{\alpha_n}(n)\alpha_n^{1+\varrho}}, \quad \varrho > 0$$

divergiert somit die erstere und konvergiert die zweite schwächer als jede in § 37 betrachtete logarithmische Hilfsreihe.

Weiter erkennt man aus dem Gange des letzten Beweises ohne weiteres, daß die Divergenz bzw. Konvergenz der betreffenden Reihen erhalten bleibt, wenn man den Faktor α_n durch $L_r(\alpha_n)$ bzw. $L_r(\alpha_n)(\log_r(\alpha_n))^\varrho$, $\varrho > 0$, ersetzt; das heißt, von den beiden Reihen

$$(7) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{L_{\alpha_n}(n) L_r(\alpha_n)}, \quad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{L_{\alpha_n}(n) L_r(\alpha_n)(\log_r(\alpha_n))^\varrho}, \quad \varrho > 0$$

ist die erste divergent, die zweite konvergent, wie groß man auch r als positive ganze Zahl fixieren mag. Hierbei kann man nun wiederum noch den festen Index r durch einen mit α_n in derselben

Weise, wie α_n mit n, allmählich zunehmenden β_{α_n} ersetzen, welcher schließlich über alle Grenzen hinauswachsen wird, wenn auch langsamer, als jeder beliebig oft iterierte Logarithmus von α_n. Die resultierenden Reihen

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{L_{\alpha_n}(n) L_{\beta_{\alpha_n}}(\alpha_n) \beta_{\alpha_n}}, \quad \sum \frac{1}{L_{\alpha_n}(n) L_{\beta_{\alpha_n}}(\alpha_n) \beta_{\alpha_n}^{1+\varrho}}, \quad \varrho > 0$$

divergieren bzw. konvergieren, usw. in infinitum.

Die entsprechenden Glieder eines solchen korrespondierenden Paares dieser divergenten und konvergenten Reihen unterscheiden sich immer nur durch den letzten Faktor und können somit, da man die Zunahme dieses Faktors ins Unbegrenzte verlangsamen kann, einander unbegrenzt genähert werden.

§ 53. Typische Formen der divergenten Reihen.

Nachdem wir durch die Entwicklungen der beiden vorhergehenden Paragraphen diejenigen Schwierigkeiten, die wir bei unserer Untersuchung über Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern zu überwinden haben, näher kennen gelernt haben, wollen wir nunmehr typische Formen solcher Reihen näher betrachten, und zwar fangen wir mit den divergenten Reihen an.

Wenn die Reihen Σu_n und Σv_n mit positiven Gliedern und den Partialsummen s_n und t_n beide divergieren, so sagen wir, daß die erste schwächer divergiert als die zweite, wenn

$$(1) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{s_n}{t_n} < 1$$

ist; diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn immer $u_n < v_n$ ist; dies ist aber gar nicht notwendig.

Bezeichnen p und q willkürliche endliche positive ganze Zahlen, so kann die Bedingung (1) auch durch die folgende

$$(2) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{s_n - s_p}{t_n - t_q} < 1$$

ersetzt werden; denn die beiden endlichen Zahlen s_p und t_q sind ja offenbar für die Bedingung (1) ohne Belang.

Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir nunmehr den folgenden allgemeinen Satz von Pringsheim[1]):

1) loc. cit. pp. 319, 320, 326.

I. *Bezeichnet*

(3) $$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

eine willkürliche monoton wachsende divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen, so divergieren die Reihen mit dem allgemeinen Gliede

(4) $$u_n = A_{n+1} - A_n,$$

(5) $$u_n' = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+1}}, \quad u_n'' = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_n},$$

(6) $$u_n''' = \frac{A_{n+1} - A_n}{L_r(A_n)} = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_n \log A_n \log_r(A_n) \ldots \log_r(A_n)},$$

wo in (6) *r eine endliche sonst aber beliebige positive ganze Zahl bedeutet, und diese Reihen divergieren um so schwächer, je langsamer* A_n *mit n über jede Grenze hinauswächst.*

Betrachten wir zuerst die Reihe (4), so ist offenbar für ihre Partialsumme

(7) $$s_n = (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + \cdots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_0,$$

und damit ist unser Satz für die Reihe (4) bewiesen. Was nun die Reihe (5) betrifft, so folgt ihre Divergenz unmittelbar aus den Sätzen von Dini und Abel § 38; denn es ist ja in der Tat wegen (7)

(8) $$A_{n+1} = s_n + A_0,$$

und demnach hat man auch

$$u_n'' = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+1}} = \frac{u_n}{s_n + A_1} = \frac{u_n}{s_n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_0}{s_n}},$$

wo der letzte Faktor rechter Hand stets positiv bleibt und dem Grenzwerte 1 für $n = \infty$ zustrebt.

Um endlich auch die Reihe (6) zu untersuchen, leiten wir aus § 23, (9) unmittelbar die Ungleichung

(9) $$u_n''' > \log_{r+1}(A_{n+1}) - \log_{r+1}(A_n)$$

ab, und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Pringsheim[1]) bemerkt noch, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

(10) $$\omega_n = \frac{A_{n+1} - A_n}{L_r(A_{n+1})}$$

1) loc. cit. p. 326.

nicht zu divergieren braucht; man hat in der Tat für $r = 1$

$$(11) \qquad \omega_n = \left(1 - \frac{A_n}{A_{n+1}}\right) \frac{1}{\log A_{n+1}} \leq \frac{1}{\log A_{n+1}} = v_n,$$

und die Reihe $\Sigma\omega_n$ wird somit sicher konvergieren, wenn dies mit Σv_n der Fall ist; setzt man aber z. B.

$$A_n \geqq e^{n^p}, \quad p > 1,$$

so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} v_n \leqq \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1)^p},$$

und die entsprechende Reihe $\Sigma\omega_n$ ist somit konvergent.

Aus (8) schließt man umgekehrt, daß das allgemeine Glied einer divergenten Reihe mit positiven Gliedern auf die Form (4) gebracht werden kann, so daß die A_n von $n = 1$ an sämtlich eindeutig bestimmt sind, während A_0 beliebig angenommen werden darf; am einfachsten setzt man daher $a_0 = 0$.

Daß die Reihe $\Sigma u_n'$ schwächer als Σu_n und $\Sigma u_n''$ noch schwächer als $\Sigma u_n'$ divergiert, liegt auf der Hand.

Es sei nun Σu_n eine willkürliche vorgelegte divergente Reihe mit positiven Gliedern; dann bestimme man vermöge (8) die Zahlen A_n und bilde die entsprechenden Reihenglieder u_n' und u_n''; die letzte dieser Reihen kann in derselben Weise behandelt werden, usw. in infinitum. Wir haben also nachgewiesen, daß es theoretisch möglich ist, aus einer vorgelegten divergenten Reihe mit positiven Gliedern andere solche Reihen, die unendlich viel langsamer divergieren, zu konstruieren. Daß aber die hierfür nötigen partiellen Summationen praktisch undurchführbar sind, liegt auch auf der Hand.

127. Mit den vorhergehenden Bezeichnungen hat man zu beweisen, daß für $0 < \varrho < 1$, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $v_n = A_{n+1}^{\varrho} - A_n^{\varrho}$, die zwar langsamer als die Reihe Σu_n, doch stärker als $\Sigma u_n'$ divergiert. (Pringsheim[1]).

§ 54. Typische Formen der konvergenten Reihen.

Wenn die Reihen $s = \Sigma u_n$ und $t = \Sigma v_n$ mit positiven Gliedern und den Partialsummen s_n und t_n beide konvergieren, so sagen wir,

1) loc. cit. p. 324.

daß die erstere dieser Reihen langsamer als die zweite konvergiert, wenn

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s-s_n}{t-t_n} > 1 \tag{1}$$

ist; diese Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn immer $u_n < v_n$ ist, doch ist diese letzte Annahme gar nicht notwendig.

Über konvergente Reihen gilt der Satz von Pringsheim[1]):

I. *Bezeichnet*

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{2}$$

eine beliebige monoton wachsende divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen, so konvergieren die Reihen mit dem allgemeinen Gliede

$$u_n = \frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1}A_n} = \frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_{n+1}} \tag{3}$$

$$u_n' = \frac{A_{n+1}^{\varrho}-A_n^{\varrho}}{A_{n+1}^{\varrho}A_n^{\varrho}}, \quad u_n'' = \frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1}A_n^{\varrho}} \tag{4}$$

$$v_n = \frac{A_{n+1}-A_n}{L_r(A_{n+1})\log_r^{\varrho}(A_{n+1})}, \quad v_n' = \frac{A_{n+1}-A_n}{e^{\varrho A_{n+1}}}, \tag{5}$$

wenn in (4) *und* (5) ϱ *positiv angenommen wird, und diese Reihen konvergieren, mit festgehaltenem* ϱ, *um so schwächer, je langsamer* A_n *mit* n *über jede Grenze hinauswächst.*

Aus (3) ergibt sich in der Tat unmittelbar für die Partialsumme s_n der Ausdruck

$$s_n = \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_1}\right) + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_{n+1}}\right) = \frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_{n+1}}, \tag{6}$$

woraus

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \frac{1}{A_0} \tag{7}$$

folgt, und somit hat man

$$\frac{1}{A_{n+1}} = s - s_n = R_n = \sum_{p=1}^{p=\infty} u_{n+p}. \tag{8}$$

Ganz in derselben Weise behandelt man die Reihe $\Sigma u_n'$, während die Konvergenz der Reihe $\Sigma u_n''$ schon in § 37, III nachgewiesen worden ist; setzen wir der Kürze halber

$$q_n = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \tag{9}$$

1) loc. cit. pp. 327, 329, 333, 335.

so haben wir wegen (4)

$$u_n' = \frac{1-q_n^\varrho}{1-q_n} \cdot u_n'' . \tag{10}$$

Was die Reihe Σv_n betrifft, so ergibt sich wegen der Formel § 23, (9)

$$v_n = \frac{A_{n+1}-A_n}{L_{r-1}(A_{n+1}) \cdot \log_r(A_{n+1})^{1+\varrho}} < \frac{\log_r(A_{n+1}) - \log_r(A_n)}{\log_r(A_{n+1})^{1+\varrho}},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$v_n = \frac{A_{n+1}-A_n}{L_r(A_{n+1}) \log_r(A_{n+1})^\varrho} < \frac{\log_r(A_{n+1}) - \log_r(A_n)}{\log_r(A_{n+1}) \log_r(A_n)^\varrho}, \tag{11}$$

so daß v_n von derselben Form wie u_n'' ist, wenn man nur $\log_r(A_n)$ anstatt A_n selbst einführt.

Für die Reihe $\Sigma v_n'$ haben wir endlich wegen § 20, (19) für $\varrho > 0$:

$$v_n' < \frac{2}{\varrho^2} \cdot \frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1}^2} < \frac{2}{\varrho^2} \cdot \frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1} A_n^\varrho} . \tag{12}$$

Aus den Formeln (6) und (8) leuchtet ein, daß man umgekehrt die Glieder einer willkürlichen konvergenten Reihe mit positiven Gliedern in der Form (3) darstellen kann. Versucht man aber A_n aus der Rekursionsformel

$$u_n'' = \frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1} A_n^\varrho}$$

zu bestimmen, so wird der Endausdruck für A_n nicht nur äußerst kompliziert, sondern er hängt insbesondere von dem willkürlich bleibenden Anfangswerte A_0 in so verwickelter Weise ab, daß nicht recht ersichtlich ist, ob überhaupt oder für welche Wahl von A_0 der resultierende Ausdruck A_n die verlangte Eigenschaft besitzt, stets mit n monoton über jede Grenze hinauszuwachsen.

Setzt man aber in (3) $A_n = B_n^\varrho$, so erhält man wegen (3)

$$u_n = \frac{B_{n+1}^\varrho - B_n^\varrho}{B_{n+1}^\varrho B_n^\varrho} = \frac{1-q_n^\varrho}{1-q_n} \cdot \frac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1} B_n^\varrho}, \quad q_n = \frac{B_n}{B_{n+1}} . \tag{13}$$

Es ist der Mühe wert, einige der im Satze I gegebenen Resultate in den in der Reihenlehre gewöhnlich gebrauchten Bezeichnungen auszudrücken; erstens beweisen wir den Satz von Dini[1]):

1) Sulle serie a termini in positivi, p. 7. Annali Univ. Toscana Bd. 9; 1867.

II. *Bezeichnet Σu_n eine beliebige konvergente Reihe mit positiven Gliedern, und bezeichnet R_n ihr Restglied, also*

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots, \tag{14}$$

alsdann konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{R_n^{\varrho}}, \tag{15}$$

je nachdem $\varrho < 1$ oder $\varrho \geqq 1$ angenommen wird.

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$u_n'' = u_n \cdot A_n^{1-\varrho},$$

woraus wegen (8)

$$u_n'' = \frac{u_n}{(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)^{1-\varrho}}$$

hervorgeht, und die Konvergenz der Reihe (15) für $\varrho < 1$ liegt auf der Hand. In § 38, IV haben wir mit Dini die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{R_n}$$

nachgewiesen.

Da nun die Reihe (15) sicher für $\varrho = 1$ divergiert, so muß sie um so mehr für $\varrho > 1$ divergieren, weil R_n den Grenzwert Null hat.

Zweitens leiten wir aus (5) und § 53, (8) unmittelbar den ähnlichen Satz ab:

III. *Ist Σu_n eine beliebige divergente Reihe mit positiven Gliedern, und bezeichnet s_n ihre Partialsumme, also*

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{16}$$

dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_n}{L_r(s_n)\log_r(s_n)^{\varrho}} \tag{17}$$

sicher für positive ϱ.

Kehren wir nun zu den allgemeinen im Satze I behandelten Reihentypen zurück, so liegt auf der Hand, daß die Reihen $\Sigma u_n'$ und $\Sigma u_n''$ beide *schwächer* als Σu_n konvergieren müssen, daß aber der Quotient der beiden Glieder u_n' und u_n'' wegen (10) stets endlich bleibt.

Über die beiden anderen Reihentypen Σv_n und $\Sigma v_n'$ können wir aber nichts allgemeines sagen. Es kann z. B. eintreffen, daß die

Reihe Σv_n *stärker* als Σu_n konvergiert; ist der Einfachheit halber $r = 1$, und nimmt die Zahlenfolge (1) so rasch zu, daß von irgend einer Stelle n ab

$$(\log A_{n+1})^{1+\varrho} \geqq A_n$$

ist, so konvergiert diese Reihe Σv_n stärker als Σu_n.

Wir beweisen aber den Satz:

IV. *Ist die Zahlenfolge* (2) *so beschaffen, daß*

$$\limsup_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} \tag{18}$$

endlich ist, so konvergieren die Reihen mit den allgemeinen Gliedern

$$w_n = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+1}^{\varrho} A_n} = \left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{1-\varrho} \cdot u_n'', \quad w_n' = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_n^{1+\varrho}} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot u_n'', \tag{19}$$

$$w_n'' = \frac{A_{n+1} - A_n}{L_r(A_n) \log_r^{\varrho}(A_n)}, \quad w_n''' = \frac{A_{n+1} - A_n}{e^{\varrho A_n}} \tag{20}$$

für positive ϱ *und zwar um so schwächer, je langsamer* A_n *mit* n *über jede Grenze hinauswächst.*

Daß die Reihen Σw_n und $\Sigma w_n'$ beide konvergieren, liegt auf der Hand, weil $\Sigma u_n''$ diese Eigenschaft hat, und der Quotient $A_{n+1} : A_n$ für jedes n endlich bleibt; für die Reihe $\Sigma w_n'''$ wird die Konvergenz unter Zuhilfenahme der (12) entsprechenden Ungleichung nachgewiesen. Es bleibt uns demnach nur übrig die Reihe $\Sigma w_n''$ zu untersuchen.

Aus der Ungleichung § 23, (8) ergibt sich

$$\log A_{n+1} - \log A_n < \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1,$$

und somit ist auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log A_{n+1}}{\log A_n} = 1;$$

in dieser Weise kann man wegen § 23, (9) unbegrenzt fortfahren, und die Konvergenz unserer Reihe $\Sigma w_n''$ ist hiermit nachgewiesen.

Es liegt dann auch auf der Hand, daß die Reihen Σv_n und $\Sigma w_n''$ schwächer und schwächer konvergieren, je größer r gewählt wird, und daß diese Reihen für jedes beliebige positive ganze r schwächer als die übrigen Reihentypen konvergieren müssen.

Aus dem Satz II folgt, daß man aus einer beliebigen vorgelegten konvergenten Reihe mit positiven Gliedern andere bilden kann, die unendlich langsamer konvergieren.

Wir leiten noch aus III und § 53, I den folgenden Satz her[1]):

IVa. *Ist Σu_n eine divergente Reihe mit positiven Gliedern, die sämtlich endlich sind, und bezeichnet s_n ihre Partialsumme, ist also*

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{21}$$

dann konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{L_r(s_n)\log_r(s_n)^{\varrho}}, \tag{22}$$

je nachdem $\varrho > 0$ oder $\varrho \leqq 0$ angenommen wird.

128. Ist Σu_n eine divergente Reihe mit positiven Gliedern, die durchweg unter der Einheit liegen, so konvergiert für positive ϱ die unendliche Reihe (Pringsheim[2]))

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{[(1-u_0)(1-u_1)\cdots(1-u_n)]^{\varrho}}.$$

129. Ist Σd_n eine divergente Reihe mit positiven Gliedern, die nicht ins unendliche wachsen, so konvergiert für positive ϱ die unendliche Reihe (Pringsheim)[3])

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_{n+1}}{[(1+d_0)(1+d_1)\cdots(1+d_n)]^{\varrho}}$$

130. Wenn die Reihe mit positiven Gliedern Σu_n konvergiert, und man weiß, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_n}{R_n}, \quad R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

divergiert, wie kann man dann die Divergenz der anderen Reihe $\Sigma u_n : R_{n-1}$ direkt nachweisen?

Kapitel XIII.

Allgemeine Kriterien von Pringsheim.

§ 55. Die Kriterien erster Art.

In den folgenden Untersuchungen, die ausschließlich Reihen mit positiven Gliedern umfassen, wenden wir stets die folgenden Bezeichnungen an:

1) Man vergleiche Dini loc. cit. p. 9.
2) loc. cit. p. 330.
3) loc. cit. p. 334.

1. $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$

bezeichnet eine monoton wachsende divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen.

2. Σd_n bezeichnet eine *divergente* Reihe mit positiven Gliedern.

3. Σk_n bezeichnet eine *konvergente* Reihe mit positiven Gliedern.

4. Σa_n ist eine zu untersuchende Reihe mit positiven Gliedern.

Nach diesen Vorbemerkungen formulieren wir folgendermaßen das Kriterium erster Art:

I. *Die Reihe* Σa_n *ist divergent oder konvergent, je nachdem*

$$(1)\qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{a_n}{d_n} = g > 0 \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{a_n}{k_n} = G < \infty \end{cases}$$

ist.

Sämtliche Kriterien erster Art lauten daher wie folgt:

$$(A)\qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = g > 0 : \textit{Divergenz} \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n A_{n+1}}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = G < \infty : \textit{Konvergenz} \end{cases}$$

und, indem $\varrho > 0$ ist

$$(B)\qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{A_{n+1}}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = g > 0 : \textit{Divergenz} \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{A_{n+1} A_n^{\varrho}}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = G < \infty : \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Das Konvergenzkriterium (B) stellt für $\varrho < 1$ eine Verbesserung des entsprechenden Kriteriums (A) dar, während das Divergenzkriterium in (B) als schlechter als dasjenige in (A) enthaltene anzusehen ist.

Legen wir nunmehr der Zahlenfolge 1. die Beschränkung auf, daß

$$(2)\qquad \limsup_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} < \infty,$$

also endlich sein soll, so erhalten wir das Kriterium:

$$(C)\qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = g > 0 : \textit{Divergenz} \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n^{1+\varrho}}{A_{n+1} - A_n} \cdot a_n = G < \infty : \textit{Konvergenz}, \end{cases}$$

wo natürlich ϱ positiv sein muß; weiter ergibt sich

$$(D)\qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{L_r(A_n)}{A_{n+1}-A_n}\cdot a_n = g > 0 : \textit{Divergenz} \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{L_r(A_n)\log_r^{\varrho}(A_n)}{A_{n+1}-A_n}\cdot a = G < \infty : \textit{Konvergenz}, \end{cases}$$

wo ϱ *positiv* sein muß.

Durch die Annahme (2) werden in der Tat aus (C) nur diejenigen divergenten Reihen, deren Glieder schließlich ohne Grenze wachsen, und diejenigen konvergenten Reihen, die stärker als jede geometrische Reihe konvergieren, ausgeschlossen.

Um diese letzte Bemerkung aufzuklären setzen wir $A_n = q^n$, $q > 1$, und erhalten somit

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{A_{n+1}A_n^{\varrho}} = \frac{q-1}{q}\cdot\left(\frac{1}{q^{\varrho}}\right)^n.$$

Für die spezielle Wahl $A_n = n$ erhält man aus (D) das gewöhnliche logarithmische Kriterium § 41, I, das in dieser Form von Bonnet gegeben worden ist.

Wir lassen nun wieder die Voraussetzung (2) fallen, so daß die Zahlenfolge 1. ganz willkürlich ist; aus § 54, (5) erhalten wir dann den Satz, nachdem wir das Zeichen von ϱ geändert haben:

II. *Die Reihe* Σa_n *divergiert oder konvergiert, je nachdem von einem gewissen* n *an*

$$(3)\qquad \frac{a_n}{A_{n+1}-A_n}\begin{cases} > g\cdot e^{\varrho A_{n+1}} & (\varrho \geqq 0) \\ < G\cdot e^{\varrho A_{n+1}} & (\varrho < 0) \end{cases}$$

ist, wobei g *und* G *endliche positive von Null verschiedene Zahlen bedeuten.*

Da nun für $a > b > 0$ auch $\log a > \log b$ ist, so erhält man aus (3)

$$(4)\qquad \liminf_{n=\infty} \frac{\log\dfrac{a_n}{A_{n+1}-A_n}}{A_{n+1}} > 0 : \textit{Divergenz}$$

$$(4\,a)\qquad \limsup_{n=\infty} \frac{\log\dfrac{a_n}{A_{n+1}-A_n}}{A_{n+1}} < 0 : \textit{Konvergenz},$$

woraus nach einer leichten Änderung das neue Kriterium folgt:

$$(E)\quad \begin{cases} \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{a_n}}{\log \dfrac{A_{n+1}}{a_n}} = \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{d_n}{a_n}}{\log \sum\limits_{p=0}^{p=n} d_p} < 0 : \textit{Divergenz} \\ \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{a_n}}{\log \dfrac{A_{n+1}}{a_n}} = \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{d_n}{a_n}}{\log \sum\limits_{p=0}^{p=n} d_p} > 0 : \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Fordert man wieder, daß die Bedingung (2) erfüllt sei, so erhält man die folgenden zwei von Dini[1]) herrührenden Kriterien:

$$(F)\quad \begin{cases} \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{a_n}}{\log \dfrac{A_n}{a_n}} = \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{d_n}{a_n}}{\log \sum\limits_{p=0}^{p=n-1} d_n} < 0 : \textit{Divergenz} \\ \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{a_n}}{\log \dfrac{A_n}{a_n}} = \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{d_n}{a_n}}{\log \sum\limits_{p=0}^{p=n-1} d_n} > 0 : \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(G)\quad \begin{cases} \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{L_r(A_n)\,a_n}}{\log_{r+1}(A_n)} < 0 : \textit{Divergenz} \\ \liminf\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \dfrac{A_{n+1}-A_n}{L_r(A_n)\,a_n}}{\log_{r+1}(A_n)} > 0 : \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Aus (F) erhält man für $A_n = n$ das Kriterium von Cauchy § 40, II, während dieselbe Annahme aus (G) das logarithmische Kriterium von Bertrand § 41, I liefert.

Wir wollen noch hier ein anderes Konvergenzkriterium erwähnen; die Reihe Σa_n ist in der Tat sicher konvergent, wenn

$$\liminf_{n=\infty} \frac{k_n}{a_n} > 1 \quad \text{oder} \quad \liminf_{n=\infty} \log\left(\frac{k_n}{a_n}\right) > 0$$

1) loc. cit. p. 14.

ist; dividiert man diese letzte Ungleichung durch die endliche, positive Zahl

$$s_n = \sum_{p=0}^{p=n} k_p,$$

so erhält man die neue Konvergenzbedingung

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\log\left(\frac{k_n}{a_n}\right)}{\sum_{p=0}^{p=n} k_p} > 0,$$

woraus unter Anwendung des Konvergenzkriteriums (E) der interessante Satz von Pringsheim hervorgeht:

III. *Die Reihe Σa_n ist sicher konvergent, wenn eine solche nicht oszillierende Zahlenfolge*

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \cdots$$

mit positiven Elementen existiert, daß

$$\text{(H)} \qquad \liminf_{n=\infty} \frac{\log\left(\frac{\varphi_n}{a_n}\right)}{\sum_{p=0}^{p=n} \varphi_n} > 0$$

ist.

Man kann auch diesem Kriterium folgende Form geben: Bedeutet

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n,\ \cdots$$

eine willkürliche (konvergente oder divergente) monoton wachsende Zahlenfolge mit positiven Elementen, und setzt man in (H) $\varphi_n = B_{n+1} - B_n$, so hat man

$$\text{(H')} \qquad \liminf_{n=\infty} \frac{\log\left(\frac{B_{n+1} - B_n}{a_n}\right)}{B_{n+1}} > 0 : \textit{Konvergenz}.$$

§ 56. Die Kriterien zweiter Art.

Das Kriterium zweiter Art lautet:

I. *Die Reihe Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem von einem gewissen n an*

$$(1) \qquad \frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} < 0 \quad \textit{oder} \quad \frac{a_n}{k_n} - \frac{a_{n+1}}{k_{n+1}} > 0$$

ist.

Diese Bedingungen sagen in der Tat nur, daß

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{d_{n+1}}{d_n} \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{k_{n+1}}{k_n}$$

ist; d. h. daß die Glieder a_n, ihren Quotienten nach, langsamer als die d_n bzw. rascher als die k_n abnehmen.

Das Kriterium zweiter Art lautet daher:

$$\text{(J)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{d_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{d_{n+1}} < 0 : \textit{Divergenz} \\ \dfrac{1}{k_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{k_{n+1}} > 0 : \textit{Konvergenz}; \end{cases} \qquad n \geqq N$$

das so erhaltene Konvergenzkriterium kann indessen in merkwürdiger Weise umgeformt werden, indem wir mit dem Restglied

$$R_n = k_{n+1} + k_{n+2} + \cdots, \qquad R_n = R_{n+1} + k_{n+1}$$

der konvergenten Reihe Σk_n multiplizieren; dadurch erhalten wir in der Tat

$$\text{(2)} \qquad \frac{R_n}{k_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{k_{n+1}} > 1;$$

bedeutet demnach

$$\text{(3)} \qquad \lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_n, \ \cdots$$

eine willkürliche monoton abnehmende Zahlenfolge mit positiven Elementen, so ergibt sich wegen (2)

$$\text{(4)} \qquad \frac{\lambda_n R_n}{k_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{\lambda_{n+1} R_{n+1}}{k_{n+1}} > \lambda_n.$$

Da nun dem Dinischen Satze § 38, IV zufolge die Reihe $\Sigma k_n : R_n$ divergiert, so muß die Reihe Σd_n, wo allgemein

$$\text{(5)} \qquad d_n = \frac{k_n}{R_n \lambda_n}$$

gesetzt worden ist, sicher auch divergieren, und das Kriterium (J) lautet demnach:

$$\text{(K)} \qquad \begin{matrix} \limsup \\ \liminf \end{matrix} \left\{ \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}} \right\} \begin{matrix} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Konvergenz}. \end{matrix}$$

Es liegt auf der Hand, daß dies Kriterium um so wirksamer ist, je langsamer die Reihe Σd_n divergiert.

Aus (2) leiten wir noch den merkwürdigen Satz ab:

II. *Im Kummerschen Konvergenzkriterium* § 40, I *braucht man*

nur solche Zahlenfolgen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ *zu verwenden, für welche die entsprechende Reihe* $\Sigma 1 : \varphi_n$ *divergiert.*

Wir verfügen nunmehr über die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ so, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} < \infty, \tag{6}$$

d. h. endlich ist, und setzen allgemein

$$d_n = A_{n+1} - A_n, \quad d_n^{(r)} = \frac{A_{n+1} - A_n}{L_r(A_{n+1})} = \frac{d_n}{L_r(A_{n+1})}, \quad L_0(a) = a \tag{7}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, \quad \lambda_n^{(r)} = \frac{1}{d_n^{(r)}} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}^{(r)}}; \tag{8}$$

aus (K) erhalten wir demnach die folgende Skala von Kriterien zweiter Art

$$\text{(L)} \quad \begin{cases} \left.\begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\right\} \lambda_n & \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Konvergenz} \end{cases} \\ \left.\begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\right\} \lambda_n^{(r)} & \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Konvergenz}. \end{cases} \end{cases}$$

Hier liegt aber die Verbesserung der Kriterien für wachsendes r nicht so unmittelbar auf der Hand wie bei den Kriterien erster Art, sondern muß für sich untersucht werden.

Betrachten wir zuerst λ_n und $\lambda_n^{(0)}$, und erinnern wir uns an den Ausdruck

$$\lambda_n^{(0)} = \frac{A_{n+1}}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{A_{n+2}}{d_{n+1}},$$

so ergibt die Elimination des Quotienten $a_n : a_{n+1}$ zwischen λ_n und $\lambda_n^{(0)}$ die Beziehung

$$\lambda_n^{(0)} = -1 + \lambda_n A_{n+1}; \tag{9}$$

denn es ist ja $1 : d_{n+1} = A_{n+2} - A_{n+1}$.

Ist nun entweder $\limsup \lambda_n < 0$ oder $\liminf \lambda_n > 0$, d. h. liefert das Anfangskriterium (L) (mit λ_n) eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe Σa_n, so wird, für $n = \infty$, $\lambda_n^{(0)} = \mp\infty$, und $\lambda_n^{(0)}$ gibt somit dieselbe Auskunft wie λ_n selbst gleichsam in vergrößertem Maßstabe.

Ist dagegen entweder $\liminf \lambda_n = 0$ oder $\limsup \lambda_n = 0$, so versagt das Anfangskriterium mit λ_n; ist aber entweder $\liminf(\lambda_n A_{n+1}) > 1$ oder $\limsup(\lambda_n A_{n+1}) < 1$, so gibt doch das folgende Kriterium

eine Entscheidung, und hierin liegt die *Verbesserung*, welche das Kriterium mit $\lambda_n^{(0)}$ liefert. Wenn endlich $\liminf \lambda_n < 0$ und $\limsup \lambda_n > 0$ ist, so versagt auch das Kriterium $\lambda_n^{(0)}$.

Betrachten wir nun weiter das allgemeine Kriterium (L), so ist

$$\lambda_n^{(r)} = \frac{L_r(A_{n+1})}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{L_r(A_{n+2})}{d_{n+1}}$$

$$\lambda_n^{(r+1)} = \frac{L_r(A_{n+1}) \log_{r+1}(A_{n+1})}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{L_r(A_{n+2}) \log_{r+1}(A_{n+2})}{d_{n+1}},$$

woraus durch Elimination des Quotienten $a_n : a_{n+1}$ folgt:

$$\lambda_n^{(r+1)} - \log_{r+1}(A_{n+1})\,\lambda_n^{(r)} =$$

$$= -\frac{L_r(A_{n+2})}{A_{n+2} - A_{n+1}} (\log_{r+1}(A_{n+2}) - \log_{r+1}(A_{n+1})),$$

und somit ergibt sich wegen der Formel § 23, (22)

$$\lim_{n=\infty} \left(\lambda_n^{(r+1)} - \log_{r+1}(A_{n+1})\,\lambda_n^{(r)}\right) = -1, \tag{10}$$

die ja mit (9) ganz analog ist und in ganz derselben Weise diskutiert werden kann.

Hiernach besitzt die Skala (L) folgende Eigenschaften:

1. Wenn irgend *ein* Kriterium der Skala eine Entscheidung liefert, so gilt das gleiche von allen *folgenden* Kriterien.

2. Versagt irgend ein Kriterium in der Weise, daß die Null als lim inf oder lim sup zum Vorschein kommt, so *kann* das folgende Kriterium eine Entscheidung liefern.

3. Resultiert für ein Kriterium $\limsup > 0$ oder $\liminf < 0$, dann versagt die ganze Skala.

Hieraus geht insbesondere deutlich hervor, daß man keineswegs von irgend einem bestimmten Anfangskriterium ausgehend durch hinlängliche Fortsetzung der betreffenden Skala immer zu einer Entscheidung gelangen muß. Vielmehr erscheint die Möglichkeit einer solchen Entscheidung definitiv ausgeschlossen, sobald der Fall 3. eintritt.

Es kommt also hierbei sehr wesentlich auf eine passende Wahl des Anfangskriteriums an. Daß es im übrigen auch hier wieder für jede beliebige Reihe Σa_n ein solches Kriterium geben muß, welches eine unzweideutige Entscheidung liefert, läßt sich leicht zeigen.

Sei nämlich Σa_n divergent, und bestimme man die A_n aus den

Gleichungen $a_{n+1} = A_{n+1} - A_n$, und setzt man $d_{n+1} = (A_{n+1} - A_n) : A_{n+1}$, so ist Σd_n sicher divergent, und man erhält

$$\lambda_n = \frac{A_n}{A_n - A_{n-1}} \cdot \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} - \frac{A_{n+1}}{A_{n+1} - A_n} = -1,$$

also Divergenz.

Konvergiert aber Σa_n, so bestimmt man die A_n aus den Gleichungen

$$a_{n+1} = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+1} A_n},$$

setzt man demnach

$$d_{n+1} = \frac{A_{n+1} - A_n}{A_n},$$

so ergibt sich

$$\lambda_n = \frac{A_{n-1}}{A_n - A_{n-1}} \cdot \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n A_{n-1}} \cdot \frac{A_{n+1} A_n}{A_{n+1} - A_n} - \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} = 1,$$

also Konvergenz.

Selbstverständlich ist auch hier durch diesen Existenzbeweis für die wirkliche Feststellung der Divergenz und Konvergenz einer beliebig vorgelegten Reihe absolut nichts gewonnen, da ja zur Bildung der obigen Kriterien die Beschaffenheit der fraglichen Reihe bekannt sein muß.

Setzt man in (L) speziell $A_n = n - 1$, also $d_n = 1$, so entfließen die elementaren Kriterien von Cauchy, Raabe und Bertrand; aus den vorhergehenden allgemeinen Bemerkungen über die Skala (L) liegt auf der Hand, daß diese speziellen Kriterien nur dann anwendbar sind, wenn die Zahlenfolge $a_n : a_{n+1}$ entweder seinen lim sup oder seinen lim inf gleich 1 hat.

Man kann andere Kriterien dieser Art erhalten, wenn man in die Formeln (1)

$$k_n = d_n e^{-\varrho A_{n+1}}, \quad d_n = A_{n+1} - A_n, \quad \varrho > 0$$

und $d_n e^{\varrho A_{n+1}}$, $\varrho > 0$, anstatt d_n einführt; dadurch ergibt sich in der Tat, wenn für $n \geqq N$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \begin{cases} < \\ > \end{cases} \frac{d_n}{d_{n+1}} e^{\varrho d_{n+1}} \begin{cases} \textit{Divergenz} \text{ für } \varrho \leqq 0 \\ \textit{Konvergenz} \text{ für } \varrho > 0, \end{cases} \tag{11}$$

woraus, indem man logarithmiert und mit d_{n+1} dividiert, das neue Kriterium folgt:

$$\begin{matrix} \limsup \\ \liminf \end{matrix} \left\{ \frac{1}{d_{n+1}} \cdot \log \frac{d_{n+1} a_n}{d_n a_{n+1}} \right\} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Konvergenz;} \end{cases} \tag{M}$$

hier unterliegt die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ keinerlei anderer Bedingung als positive Elemente zu besitzen und monoton wachsend und divergent zu sein.

Ist aber die Bedingung (6) erfüllt, so darf man in (11) $\varrho\, d_n$ anstatt $\varrho\, d_{n+1}$ als Exponent anwenden, und das Kriterium (M) nimmt folgende neue Gestalt an:

$$\text{(N)} \qquad \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\left\{\frac{1}{d_n}\cdot\log\frac{d_{n+1}\,a_n}{d_n\,a_{n+1}}\right\}\begin{matrix}<0: \textit{Divergenz}\\ >0: \textit{Konvergenz},\end{matrix}$$

woraus in gewöhnlicher Weise das folgende Kriterium hergeleitet werden kann:

$$\text{(O)} \qquad \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\left\{\frac{L_r(A_{n+1})}{d_n}\cdot\log\frac{d_n\,L_r(A_n)\,a_n}{d_{n+1}\,L_r(A_{n+1})\,a_{n+1}}\right\}\begin{matrix}<0: \textit{Divergenz}\\ >0: \textit{Konvergenz}.\end{matrix}$$

Setzt man in (N) $A_n = n-1$ also $d_n = 1$, so entfließt das Fundamentalkriterium von Cauchy § 40, I, während das Kriterium (O) in diesem Falle Analogien des Bertrandschen liefert; für $r=0$ ergibt sich der Ausdruck

$$n\cdot\log\frac{n\,a_n}{(n+1)\,a_{n+1}};$$

da nun wegen § 23, (20)

$$\lim_{n=\infty}\left(n\cdot\log\frac{n}{n+1}\right) = -1$$

ist, so ergibt sich das Kriterium von Schlömilch:

$$\text{(12)} \qquad \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\left\{n\cdot\log\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}\begin{matrix}<1: \textit{Divergenz}\\ >1: \textit{Konvergenz}.\end{matrix}$$

Aus (M) kann man noch einen interessanten Satz herleiten; setzt man in der Tat $k_n = B_{n+1} - B_n$, und ist $\varrho > 0$, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum k_n\, e^{-\varrho B_{n+1}};$$

man hat daher für die Reihe Σa_n sicher Konvergenz, wenn

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{k_n}{k_{n+1}}\cdot e^{\varrho(B_{n+2}-B_{n+1})} = \frac{k_n}{k_{n+1}}\cdot e^{\varrho k_{n+1}},$$

also, indem man logarithmiert und zur Grenze übergeht, wenn

$$\text{(13)} \qquad \liminf_{n=\infty}\frac{1}{k_{n+1}}\cdot\log\frac{k_{n+1}\,a_n}{k_n\,a_{n+1}} > \varrho > 0$$

ist. Kombiniert man aber (13) mit dem Konvergenzkriterium (M), so ergibt sich der Satz:

III. *Ist* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n \cdots$ *eine nicht oszillierende Zahlenfolge mit positiven Elementen, so konvergiert die Reihe* Σa_n, *wenn*

$$\liminf_{n=\infty} \varphi_{n+1} \cdot \log \frac{\varphi_n a_n}{\varphi_{n+1} a_{n+1}} > 0 \tag{14}$$

ist.

§ 57. Vergleichung der Kriterien erster und zweiter Art.

Um die Tragweite der bisher entwickelten Kriterien zu beurteilen, beweisen wir zuerst die folgenden Sätze von Pringsheim:

I. *Bezeichnet* $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n \cdots$ *eine willkürliche Zahlenfolge mit positiven Elementen, während die Folge*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{1}$$

ebenfalls mit positiven Elementen divergiert, so haben die zwei Zahlenfolgen mit dem allgemeinen Elemente

$$u_n = \varphi_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \varphi_{n+1}, \qquad v_n = \varphi_{n+1} \cdot \log \frac{a_n \varphi_n}{a_{n+1} \varphi_{n+1}} \tag{2}$$

sowohl denselben lim sup *als denselben* lim inf.

Aus den Definitionen (2) erhalten wir

$$u_n = \varphi_{n+1} \cdot \left(e^{\frac{v_n}{\varphi_{n+1}}} - 1 \right), \qquad v_n = \varphi_{n+1} \cdot \log \left(1 + \frac{u_n}{\varphi_{n+1}} \right); \tag{3}$$

es seien demnach erstens die zwei Größen

$$B = \limsup_{n=\infty} u_n, \qquad A = \liminf_{n=\infty} u_n \tag{4}$$

beide endlich; alsdann ist es für eine vorgegebene, willkürlich kleine, aber von Null verschiedene positive Größe ε möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$A - \varepsilon < u_n < B + \varepsilon \tag{5}$$

sein muß, woraus wegen (3) folgt:

$$\varphi_{n+1} \cdot \log \left(1 + \frac{A - \varepsilon}{\varphi_{n+1}} \right) < v_n < \varphi_{n+1} \cdot \log \left(1 + \frac{B + \varepsilon}{\varphi_{n+1}} \right).$$

Da nun A und B beide endlich sind, während die Zahlenfolge (1) divergiert, so hat man von einem gewissen n an immer

$$|B + \varepsilon| < \varphi_{n+1}, \qquad |A - \varepsilon| < \varphi_{n+1},$$

und somit ergibt sich wegen § 23, (21)

$$\frac{A - \varepsilon}{1 + \frac{A - \varepsilon}{\varphi_{n+1}}} < v_n < B + \varepsilon. \tag{6}$$

Setzt man demnach

$$A' = \liminf_{n=\infty} v_n, \qquad B' = \limsup_{n=\infty} v_n, \tag{7}$$

so hat man wegen (6), weil ε beliebig klein ist, und die Zahlenfolge (1) divergiert

$$A' \geqq A, \qquad B' \leqq B. \tag{8}$$

Sind umgekehrt die beiden Zahlen A' und B' endlich, so erhält man mit denselben Bezeichnungen wie vorher für $n \geqq N$ immer

$$A' - \varepsilon < v_n < B' + \varepsilon,$$

woraus wegen (3)

$$\varphi_{n+1} \cdot \left(e^{\frac{A'-\varepsilon}{\varphi_{n+1}}} - 1\right) < u_n < \varphi_{n+1} \cdot \left(e^{\frac{B'+\varepsilon}{\varphi_{n+1}}} - 1\right)$$

hervorgeht, und die Ungleichungen § 20, (22) liefern demnach die beiden anderen

$$A' - \varepsilon < u_n < \frac{B'+\varepsilon}{1 - \frac{B'+\varepsilon}{\varphi_{n+1}}},$$

woraus

$$A \geqq A', \qquad B \leqq B' \tag{9}$$

folgt, und die Vergleichung von (8) und (9) liefert unmittelbar $A = A'$, $B = B'$.

Ist nun zweitens z. B. $A = -\infty$, so müssen unzählige der u_n negativ mit beliebig großem absolutem Betrage sein; die erste Formel (3) zeigt dann, daß auch unzählige der v_n negativ sein müssen; es ist also sicher wegen (7) A' *negativ;* wäre nun weiter $|A'|$ endlich, so hätte wegen der ersten Formel (3) $|A|$ auch dieselbe Eigenschaft. Es ist daher $A' = -\infty$. In derselben Weise sind die anderen möglichen Fälle zu behandeln, und damit ist unser Satz vollkommen bewiesen.

II. *Ist die Zahlenfolge* (1) *mit einem positiven Grenzwerte konvergent, so besitzen die u_n und v_n von einem gewissen n an stets gleiches Vorzeichen, und die aus diesen Zahlen gebildeten Folgen sind gleichzeitig konvergent, divergent oder oszillierend.*

Ist nämlich ω der Grenzwert der Fundamentalreihe (1), so dividiere man in (2) u_n, v_n, φ_n und φ_{n+1} durch ω; daraus ergibt sich, daß wir nur den Fall $\omega = 1$ zu betrachten haben; es ist daher wegen (3)

$$u_n = e^{v_n} - 1, \qquad v_n = \log(1 + u_n), \tag{10}$$

woraus unser Satz unmittelbar folgt.

Aus I ergibt sich nun ohne weiteres das folgende Resultat:

III. *Das Kummersche Konvergenzkriterium* § 40, I *und das Konvergenzkriterium* § 56, (14) *liefern, wenn die Zahlenfolge* (1) *divergiert, ganz gleiche Resultate. Und es gilt für* $\lim d_n = 0$, *das nämliche von den Kriterien* (K) *und* (N).

Weiter vergleichen wir die beiden Kriterien (E) und (N), indem wir

$$d_n = \frac{1}{\varphi_n}$$

setzen, so daß die Reihe $\Sigma \varphi_n^{-1}$ also als divergent vorausgesetzt wird, was ja, wie wir gesehen haben, gestattet ist; wir setzen demnach

$$(11) \qquad v_n = \varphi_{n+1} \cdot \log \frac{\varphi_n a_n}{\varphi_{n+1} a_{n+1}}, \quad t_n = \frac{\log \frac{1}{\varphi_n a_n}}{\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{\varphi_n}}.$$

Mit den Bezeichnungen (7) erhalten wir auch für $n \geqq N$ immer

$$\frac{A' - \varepsilon}{\varphi_{n+1}} < \log \frac{\varphi_n a_n}{\varphi_{n+1} a_{n+1}} < \frac{B' + \varepsilon}{\varphi_{n+1}};$$

setzen wir demnach in diese Ungleichungen nacheinander $n+1$, $n+2, \ldots, n+p-1$ anstatt n, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Resultate

$$(12) \qquad (A' - \varepsilon) \cdot \sum_{q=n+1}^{q=n+p} \frac{1}{\varphi_q} < \log \frac{\varphi_n a_n}{\varphi_{n+p} a_{n+p}} < (B' + \varepsilon) \cdot \sum_{q=n+1}^{q=n+p} \frac{1}{\varphi_q};$$

es ist aber identisch

$$\log \frac{\varphi_n a_n}{\varphi_{n+p} a_{n+p}} = \log \frac{1}{\varphi_{n+p} a_{n+p}} + \log (\varphi_n a_n);$$

dividieren wir daher in (12) mit

$$(13) \qquad \sum_{q=0}^{q=n+p} \frac{1}{\varphi_q},$$

und setzen wir der Kürze halber

$$Q_{n,p} = \Big(\sum_{q=n+1}^{q=n+p} \frac{1}{\varphi_q}\Big) : \Big(\sum_{q=0}^{q=n+p} \frac{1}{\varphi_q}\Big),$$

so erhalten wir wegen der Definition von t_{n+p}

$$(14) \qquad (A' - \varepsilon) \cdot Q_{n,p} < t_{n+p} < (B' + \varepsilon)\, Q_{n,p}.$$

Da nun n eine endliche Zahl ist, und da die aus (13) für $p = \infty$ erhaltene Reihe divergiert, so hat man

$$\lim_{p=\infty} Q_{n,p} = 1:$$

setzt man daher

$$\alpha = \liminf_{n=\infty} t_n, \qquad \beta = \limsup_{n=\infty} t_n, \tag{15}$$

so ergibt sich wegen (14)

$$\alpha \geqq A', \qquad \beta \leqq B'. \tag{16}$$

Wenn daher die Zahlenfolge $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n \ldots$ entweder konvergiert oder eigentlich divergiert, so hat diese andere $t_0 t_1 t_2 \ldots t_n \ldots$ dieselbe Eigenschaft, und es ist in diesem Falle

$$\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} v_n, \tag{17}$$

wo also der $\lim v_n$ existieren soll, d. h. endlich und bestimmt oder unendlich groß mit bestimmtem Vorzeichen sein muß.

Setzt man speziell $\varphi_n = 1$, d. h.

$$v_n = \log \frac{a_n}{a_{n+1}}, \qquad t_n = \frac{1}{n} \cdot \log \frac{1}{a_n},$$

so hat man die in § 19, (13) entwickelte Formel von *Cauchy:*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{18}$$

wo also der *letztere* Grenzwert existieren muß.

Da aber in (18) der *erstere* Grenzwert sehr wohl existieren kann, ohne daß dies mit dem letzteren der Fall zu sein braucht, so liegt auf der Hand, daß wir die soeben entwickelte Schlußweise nicht umkehren dürfen, um aus α und β Auskünfte über A' und B' zu erhalten außer denjenigen in (16) gegebenen.

Wenden wir nun den Satz I an, so ergibt sich der folgende andere:

IIIa. *Divergiert die Zahlenfolge* (1), *und liefern die aus* u_n *und* v_n *in* (2) *gebildeten Kriterien zweiter Art,* (K) *und* (M), *bezüglich der Reihe* Σa_n *eine Entscheidung, oder versagen sie in der Weise, daß Null als* lim sup *oder* lim inf *zum Vorschein kommt, so gilt das gleiche von dem aus* t_n *in* (11) *gebildeten Kriterium erster Art* (E). *Dagegen kann* (E) *eine bestimmte Entscheidung liefern, wenn* (K) *oder* (M) *versagen, weil* lim inf < 0 *und* lim sup > 0 *ist.*

Über die Vergleichung der logarithmischen Kriterien verweisen wir auf die Arbeit von Pringsheim.[1])

131. Ist mit den obigen Bezeichnungen $\lim u_n = \lim v_n = \lim t_n = \varrho$, so hat man $\lim (\varphi_n a_n) = 0$ oder $\lim (\varphi_n a_n) = \infty$, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist. (P. du Bois Reymond.[2])

§ 58. Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern.

Während wir die in § 55 anfangs gegebenen Bedingungen 1., 2. und 3. ungeändert beibehalten, so ändern wir 4. dahin, daß die positiven Glieder der zu untersuchenden Reihe Σa_n monoton abnehmen sollen; weiter setzen wir

$$(1) \qquad d_n = \frac{1}{D_n}, \quad k_n = \frac{1}{K_n}, \quad a_n = \frac{1}{M_n};$$

diese reziproken Werte treten in der Tat häufig in unseren folgenden Untersuchungen auf.

Obgleich wir im allgemeinen nicht aus den von einem gewissen n an gültigen Beziehungen

$$a_n - a_{n+1} \gtrless d_n - d_{n+1}, \; a_n - a_{n+1} \lessgtr k_n - k_{n+1}$$

schließen dürfen, daß die Reihe Σa_n divergiert bzw. konvergiert (man betrachte z. B. $a_n = 1 + n^{-3}$, $k_n = n^{-2}$), so lassen sich jedoch Kriterien, welche auf die Beschaffenheit von $(a_n - a_{n+1})$ beruhen, durch folgende einfache Betrachtungen ableiten:

Aus der Identität

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_0 + n a_n + [(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + (n-1)(a_{n-1} - a_n)]$$

folgert man in der Tat ohne weiteres:

1. Die Reihe Σa_n divergiert sicher, wenn dies mit $\Sigma n(a_n - a_{n+1})$ der Fall ist.

2. Die Reihe Σa_n konvergiert sicher wenn $\lim (n \cdot a_n) = 0$ für $n = \infty$ ist, und wenn außerdem die Reihe $\Sigma n(a_n - a_{n+1})$ konvergiert.

Hieraus ergibt sich dann unmittelbar das Kriterium:

$$(P) \quad \begin{cases} \liminf \frac{n}{d_n}(a_n - a_{n+1}) = g > 0 : \textit{Divergenz}, \\ \limsup \frac{n}{k_n}(a_n - a_{n+1}) = G < \infty : \textit{Konvergenz}, \end{cases}$$

d. h. ein Kriterium erster Art für die Reihe $\Sigma n(a_n - a_{n+1})$.

1) Mathematische Annalen Bd. 35, p. 377—379; 1890.

2) Journal für Math. Bd. 76, p. 68; 1873.

Führen wir nun weiter die Differenz der reziproken Reihenglieder

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = M_{n+1} - M_n$$

ein, so erhalten wir den Satz:

I. *Ist von einem gewissen n an immer*

$$(2) \qquad M_{n+1} - M_n \begin{cases} \leqq G\,(D_{n+1} - D_n), & G < \infty, \\ \geqq g\,(K_{n+1} - K_n), & g > 0, \end{cases}$$

so divergiert oder konvergiert die Reihe Σa_n.

Setzt man in der Tat in (2) nacheinander $n+1$, $n+2 \ldots$, $n+p$ anstatt n ein, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Relationen:

$$M_{n+p} - M_n \begin{cases} \leqq G\,(D_{n+p} - D_n), \\ \geqq g\,(K_{n+p} - K_n); \end{cases}$$

setzt man daher

$$A = \frac{M_n}{G} - D_n, \qquad B = \frac{M_n}{g} - K_n,$$

so erhält man unmittelbar wegen (1)

$$a_{n+p} \geqq \frac{1}{G} \cdot \frac{d_{n+p}}{1 + A d_{n+p}}, \qquad a_{n+p} \leqq \frac{1}{g} \cdot \frac{k_{n+p}}{1 + B k_{n+p}};$$

da nun A und B feste Konstanten bezeichnen, weil n endlich ist, während d_{n+p} und k_{n+p} für unbegrenzt wachsendes p beide dem Grenzwerte Null zustreben, so ist unser Satz damit bewiesen.

Aus (2) erhält man unmittelbar das Kriterium

$$(Q) \qquad \begin{cases} \limsup \dfrac{M_{n+1} - M_n}{D_{n+1} - D_n} = G < \infty : \textit{Divergenz}, \\ \liminf \dfrac{M_{n+1} - M_n}{K_{n+1} - K_n} = g > 0 \ : \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Hier sind die D_n und die K_n ganz beliebig gewählt worden; wir erhalten aber um so wirksamere Kriterien, je schneller die Differenz $D_{n+1} - D_n$ bzw. je langsamer die Differenz $K_{n+1} - K_n$ mit n wächst.

Um ein wirksames Anfangskriterium zu erhalten, setzen wir voraus, daß die Differenz $D_{n+1} - D_n \geqq h > 0$ für jedes n ist, und wir setzen

$$D_n = \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} = \left(\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1\right)^{-1}.$$

Da weiter $\lim D_n = \infty$ sein muß, so hat man daher

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1. \tag{3}$$

Setzt man demnach, für $\varrho > 0$,

$$K_n = \frac{A_n^{1+\varrho}}{A_{n+1} - A_n} = D_n A_n^{\varrho},$$

so hat man identisch

$$K_{n+1} - K_n = A_{n+1}^{\varrho}(D_{n+1} - D_n) + D_n(A_{n+1}^{\varrho} - A_n^{\varrho}),$$

woraus, indem man

$$q_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \text{ also } \lim_{n=\infty} q_n = 1,$$

setzt:

$$\frac{K_{n+1} - K_n}{(D_{n+1} - D_n) A_n^{\varrho}} = q_n^{\varrho} + \frac{1}{D_{n+1} - D_n} \cdot \frac{q_n^{\varrho} - 1}{q_n - 1}; \tag{4}$$

da nun aber wegen § 24, (19)

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_n^{\varrho} - 1}{q_n - 1} = \varrho$$

ist, so bleibt der Bruch linker Hand in (4), für jedes n, endlich und von Null verschieden.

Man kann daher das Kriterium (Q) folgendermaßen formulieren:

$$\text{(R)} \quad \begin{cases} \limsup \dfrac{M_{n+1} - M_n}{D_{n+1} - D_n} = G < \infty: \textit{ Divergenz}, \\ \liminf \dfrac{M_{n+1} - M_n}{(D_{n+1} - D_n) A_n^{\varrho}} = g > 0: \textit{ Konvergenz} \end{cases} \quad (\varrho > 0).$$

Setzen wir nunmehr für positive ganze r

$$\Lambda_r(x) = \log x \cdot \log_2(x) \cdot \log_3(x) \ldots \log_r(x),$$

und führen wir die Zahlenwerte

$$D_n^{(r)} = \frac{A_n \Lambda_r(A_n)}{A_{n+1} - A_n} = D_n \Lambda_r(A_n),$$

$$K_n^{(r)} = \frac{A_n \Lambda_r(A_n) \log_r^{\varrho}(A_n)}{A_{n+1} - A_n} = D_n \Lambda_r(A_n) \log_r^{\varrho}(A_n)$$

ein, so hat man erstens identisch

$$D_{n+1}^{(r)} - D_n^{(r)} = \Lambda_r(A_{n+1})(D_{n+1} - D_n) + D_n(\Lambda_r(A_{n+1}) - \Lambda_r(A_n)),$$

woraus

$$\frac{D_{n+1}^{(r)} - D_n^{(r)}}{(D_{n+1} - D_n)\Lambda_r(A_n)} = \frac{\Lambda_r(A_{n+1})}{\Lambda_r(A_n)} + \frac{P_{n,r}}{D_{n+1} - D_n} \tag{5}$$

folgt, indem der Kürze halber

$$P_{n,r} = D_n \left(\frac{A_r(A_{n+1})}{A_r(A_n)} - 1 \right) \tag{6}$$

gesetzt worden ist.

Aus der Identität $A_r(x) = \log_r(x)\, A_{r-1}(x)$ erhält man aber wegen (6), indem man die Definition von D_n anwendet,

$$P_{n,r} - P_{n,r-1} = \frac{A_{r-1}(A_{n+1})}{A_r(A_n)} \cdot \frac{\log_r(A_{n+1}) - \log_r(A_n)}{A_{n+1} - A_n} \cdot A_n ;$$

worin aber wegen § 23, (9) und (22) die beiden Faktoren rechter Hand verschwinden müssen, und demnach ist

$$\lim_{n=\infty} (P_{n,r} - P_{n,r-1}) = 0 .$$

Für $r = 1$ findet man direkt

$$\lim_{n=\infty} P_{n,1} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} \cdot \frac{\log(A_{n+1}) - \log A_n}{\log A_n} = 0 ,$$

und demnach ist auch allgemein $\lim P_{n,r} = 0$ für $n = \infty$, so daß (5) diesen anderen Grenzwert liefert ($\liminf (D_{n+1} - D_n) > 0$):

$$\lim_{n=\infty} \frac{D^{(r)}_{n+1} - D^{(r)}_n}{(D_{n+1} - D_n) A_r(A_n)} = 1 . \tag{7}$$

Zweitens hat man identisch

$$K^{(r)}_{n+1} - K^{(r)}_n = \log^{\varrho}_r(A_{n+1})\,(D^{(r)}_{n+1} - D^{(r)}_n) + D^{(r)}_n\,(\log^{\varrho}_r(A_{n+1}) - \log^{\varrho}_r(A_n));$$

aus der Formel $D^{(r)}_n = D_n \cdot A_r(A_n)$ ergibt sich daher

$$\frac{K^{(r)}_{n+1} - K^{(r)}_n}{(D_{n+1} - D_n) A_r(A_n) \log^{\varrho}_r(A_n)} = \left(\frac{\log_r(A_{n+1})}{\log_r(A_n)} \right)^{\varrho} \cdot \frac{D^{(r)}_{n+1} - D^{(r)}_n}{(D_{n+1} - D_n) A_r(A_n)} + \\ + \frac{D_n}{D_{n+1} - D_n} \cdot \frac{\log^{\varrho}_r(A_{n+1}) - \log^{\varrho}_r(A_n)}{\log^{\varrho}_r(A_n)} .$$

Da der letzte Summand rechter Hand auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{A_n}{D_{n+1} - D_n} \cdot \frac{\log_r(A_{n+1}) - \log_r(A_n)}{(A_{n+1} - A_n) \log_r(A_n)} \cdot \frac{\left(\frac{\log_r(A_{n+1})}{\log_r(A_n)} \right)^{\varrho} - 1}{\frac{\log_r(A_{n+1})}{\log_r(A_n)} - 1} ,$$

so verschwindet dieses Glied offenbar für $n = \infty$; und wegen (7) ergibt sich daher:

$$\lim_{n=\infty} \frac{K^{(r)}_{n+1} - K^{(r)}_n}{(D_{n+1} - D_n) A_r(A_n) \log^{\varrho}_r(A_n)} = 1 \tag{8}$$

Setzt man daher in (R) $D_{n+1}^{(r)}$ und $D_n^{(r)}$ anstatt D_{n+1} bzw. D_n, so erhält man wegen (7) und (8) das andere Kriterium

$$(S)\quad \begin{cases} \limsup \dfrac{M_{n+1}-M_n}{(D_{n+1}-D_n)\,A_r(A_n)} = G < \infty: \textit{ Divergenz}, \\ \liminf \dfrac{M_{n+1}-M_n}{(D_{n+1}-D_n)\,A_r(A_n)\log_r(A_n)^\varrho} = g > 0: \textit{ Konvergenz} \quad (\varrho \geqq 0). \end{cases}$$

Die Divergenzkriterien (R) und (S) gelten offenbar noch, wenn man im Nenner für $\varrho \leqq 0$ den Faktor A_n^ϱ bzw. $\log_r(A_n)^\varrho$ hinzufügt; nach dieser Änderung erhält man, wenn man logarithmiert und durch $\log A_n$ bzw. $\log_{r+1}(A_n)$ dividiert, die beiden anderen Kriterien:

$$(T)\quad \begin{cases} \limsup \left\{ \dfrac{\log\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{D_{n+1}-D_n}\right)}{\log A_n} \right\} < 0: \textit{ Divergenz}, \\ \liminf \left\{ \dfrac{\log\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{D_{n+1}-D_n}\right)}{\log A_n} \right\} > 0: \textit{ Konvergenz}. \\ \limsup \left\{ \dfrac{\log\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{(D_{n+1}-D_n)\,A_r(A_n)}\right)}{\log_{r+1}(A_n)} \right\} < 0: \textit{ Divervenz}, \\ \liminf \left\{ \dfrac{\log\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{(D_{n+1}-D_n)\,A_r(A_n)}\right)}{\log_{r+1}(A_n)} \right\} > 0: \textit{ Konvergenz}. \end{cases}$$

Die so entwickelten Kriterien nehmen ihre einfachste Gestalt an, wenn man $A_n = n$, also $D_n = n$ setzt.

Hat man speziell, für jedes n, $a_n > a_{n+1}$, so ist die Zahlenfolge

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \cdots, M_n, \cdots, \qquad M_n = \frac{1}{a_n}$$

monoton wachsend und divergent; man kann also überall

$$D_n = \frac{M_n}{M_{n+1}-M_n}, \qquad K_n = \frac{M_{n+1}M_n^\varrho}{M_{n+1}-M_n}$$

$$D_n^{(r)} = \frac{M_n A_r(M_n)}{M_{n+1}-M_n}, \qquad K_n^{(r)} = \frac{M_{n+1}A_r(M_n)\log_r^\varrho(M_n)}{M_{n+1}-M_n}$$

setzen.

Nun konvergiert oder divergiert die Reihe Σa_n offenbar, je nachdem

$$\liminf_{n=\infty} \frac{M_{n+1}}{K_n} = g > 0 \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n=\infty} \frac{M_n}{D_n} = G < \infty$$

ist, woraus die Kriterien hervorgehen:

$$(V)\quad \begin{cases} \limsup\,(M_{n+1}-M_n) = G < \infty: \textit{ Divergenz}, \\ \liminf\,(M_{n+1}-M_n)\,M_n^{-\varrho} = g > 0: \textit{ Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(V')\quad \begin{cases} \limsup \dfrac{M_{n+1}-M_n}{A_r(M_n)} = G < \infty: \textit{ Divergenz}, \\ \liminf \dfrac{M_{n+1}-M_n}{A_r(M_n)\log_r(M_n)^\varrho} = g > 0: \textit{ Konvergenz} \quad (\varrho \geqq 0). \end{cases}$$

Durch die gewöhnliche Methode findet man daher wie vorher:

$$(W)\qquad \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\log(M_{n+1}-M_n)\\ \log M_n\end{matrix}\right\}\begin{matrix}<0\colon \textit{Divergenz},\\ >0\colon \textit{Konvergenz}.\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\log\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{A_r(M_n)}\right)\\ \log_{r+1}(M_n)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}<0\colon \textit{Divergenz},\\ >0\colon \textit{Konvergenz}.\end{matrix}$$

Die übrigen Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern, die Pringsheim in § 10 seiner Abhandlung gibt, würden uns, ihrer mehr funktionentheoretischen Natur wegen, hier viel zu weit führen.

Kapitel XIV.

Unendliche Produkte.

§ 59. Konvergenz und Divergenz.

Aus der unendlichen Zahlenfolge

$$(1)\qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

bilden wir eine neue

$$(2)\qquad P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots\cdots,$$

indem wir für jedes n

$$(3)\qquad P_n = a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

setzen. Wächst in (3) n über jede Grenze hinaus, so entsteht ein unendliches Produkt; dies heißt *konvergent*, wenn 1. die Zahlenfolge (2) konvergiert, und 2. der Grenzwert dieser Zahlenfolge *nicht* gleich Null ist. Ein nicht-konvergentes unendliches Produkt heißt immer *divergent*. Außer der allgemeinen Konvergenzbedingung

$$(4)\qquad |P_{n+p}-P_n|<\varepsilon,\qquad n\geqq N,$$

p willkürlich positiv ganz, wird also hier noch gefordert, daß für jedes n

$$(5)\qquad |P_n|>g$$

ist, wo g eine bestimmte endliche positive Größe bezeichnet.

Mit diesen Definitionen beweisen wir nun ohne Mühe den Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des obengenannten Produktes besteht darin, daß es für ein vorgegebene willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε mög-*

lich ist eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$\left|\frac{P_{n+p}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon \tag{6}$$

wird, indem p eine willkürliche positive ganze Zahl bezeichnet.

Ist nämlich erstens das Produkt konvergent, und dividiert man (4) durch die endliche von Null verschiedene positive Zahl $|P_n|$, so entfließt (6); diese Bedingung ist daher sicher *notwendig.*

Ist nun zweitens die Bedingung (6) erfüllt, und bestimmt man für ein aufgegebenes ε eine entsprechende positive ganze Zahl n, so ist $P_n = A$ eine von Null verschiedene positive endliche Zahl; denn wir setzen natürlich voraus, daß kein a_n, für n endlich, weder Null noch unendlich groß sei. Multipliziert man aber (6) mit $|P_n| = A$, so ergibt sich

$$|P_{n+p} - P_n| < A\,\varepsilon, \quad A(1-\varepsilon) < |P_{n+p}| < A(1+\varepsilon). \tag{7}$$

Die erste der Ungleichungen (7) ergibt aber unmittelbar (4), die zweite dagegen (5). Setzt man in (6) $p = 1$, $a_{n+1} = 1 + u_{n+1}$, so ergibt sich $|u_{n+1}| < \varepsilon$ für $n \geqq N$; also:

II. *Eine notwendige aber keineswegs hinreichende Bedingung für die Konvergenz des oben betrachteten unendlichen Produktes besteht darin, daß, wenn man*

$$a_n = 1 + u_n \tag{8}$$

setzt, $\lim u_n = 0$ *für* $n = \infty$ *sein muß.*

Wir betrachten daher in unseren folgenden Untersuchungen ausschließlich die Form (8) für den Faktor a_n, und das unendliche Produkt wird allgemein als

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots = \prod_{p=1}^{p=\infty}(1+u_p), \tag{9}$$

oder kürzer als $\Pi(1+u_p)$, wenn kein Mißverständnis möglich ist, bezeichnet.

Daß diejenige in II ausgesprochene notwendige Bedingung im allgemeinen nicht hinreichend sein kann, geht deutlich hervor, wenn man speziell $u_n = \pm 1 : n$ einsetzt, dann hat man in der Tat

$$\prod_{p=1}^{p=n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = n+1, \quad \prod_{p=2}^{p=n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n};$$

die entsprechenden unendlichen Produkte sind daher beide divergent, indem das erste gegen ∞, das zweite gegen 0 divergiert.

Für das Partialprodukt

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n)$$

ergibt sich die Rekursionsformel

$$P_n = (1 + u_n)\, P_{n-1} = P_{n-1} + u_n P_{n-1}; \tag{10}$$

setzt man demnach in (10) nacheinander $n - 1$, $n - 2$, $\cdots$, 3, 2, 1 anstatt n, und addiert man sämtliche so erhaltene Gleichungen, so ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\prod_{p=1}^{p=n} (1 + u_p) = 1 + \sum_{s=1}^{s=n} u_s P_{s-1}, \tag{11}$$

wo der Kürze halber $P_0 = 1$ zu setzen ist.

Die Formel (11) gestattet uns ein Produkt in eine Reihe zu verwandeln; es ist indessen ebenso leicht die Reihensumme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{12}$$

in ein Produkt umzuschreiben. Aus der Identität

$$1 + \frac{u_p}{s_{p-1}} = \frac{s_p}{s_{p-1}}$$

ergibt sich nämlich unmittelbar die Produktentwicklung

$$s_n = u_0 \cdot \prod_{p=1}^{p=n} \left(1 + \frac{u_p}{s_{p-1}}\right). \tag{13}$$

Natürlich sind diese beide Formeln (12) und (13) im allgemeinen nicht praktisch anwendbar, weil wir weder die Partialprodukte P_n noch die Partialsummen s_n in einfacher Form bestimmen können; da diese beiden Formeln aber für jedes n gelten, so entfließt der Satz:

III. *Läßt man in* (11) *oder* (13) n *über jede Grenze hinauswachsen, so werden die in jeder dieser Formeln eingehenden unendlichen Reihen und Produkte gleichzeitig konvergieren oder divergieren, wenn die betreffende Reihe nur nicht mit der Summe Null konvergiert.*

Cauchy[1]), der die erste Grundlage der exakten Theorie der unendlichen Produkte gegeben hat, gibt den folgenden Satz, der uns später sehr nützlich sein wird:

IV. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz des Produktes* $\Pi(1 + u_p)$ *besteht darin, daß die unendliche Reihe* $\Sigma \log(1 + u_n)$ *konvergiert, und es ist dann immer* $\log \Pi(1 + u_n) = \Sigma \log(1 + u_n)$ *für alle* $n \geq N$.

1) Analyse algébrique, p. 562, 1821.

Sei erstens das Produkt $\Pi(1+u_n)$ konvergent; dann hat man mit den gewöhnlichen Bezeichnungen

$$\frac{P_{n+p}}{P_n} = 1+\delta, \qquad |\delta| < \varepsilon, \qquad n \geq N,$$

woraus, indem die q_s sämtlich ganz sind:

$$(14) \qquad \sum_{s=1}^{s=p} (\log(1+u_{n+s}) + 2q_s\pi i) = \log\left(\frac{P_{n+p}}{P_n}\right) = \log(1+\delta)$$

folgt. Da nun $\lim \log(1+u_m) = 0$ ist, und da die Reihe in (14) konvergiert, so ist immer $q_s = 0$, und somit ergibt sich wegen § 23, (20)

$$\left|\sum_{s=1}^{s=p} \log(1+u_{n+s})\right| < |\delta| \cdot K, \qquad n \geq N,$$

da nun K endlich und von Null verschieden ist, so konvergiert die Reihe $\Sigma \log(1+u_p)$.

Ist umgekehrt diese Reihe konvergent, so hat man

$$\sum_{s=1}^{s=p} \log(1+u_{n+s}) = \delta, \qquad |\delta| < \varepsilon, \qquad n > N,$$

woraus wegen (14)

$$\frac{P_{n+p}}{P_n} = e^{\delta} = 1 + \delta \cdot K_1$$

hervorgeht, worin K_1 für unbegrenzt abnehmendes δ dem Grenzwerte 1 zustrebt; dies ist aber genau die Bedingung (6) und somit konvergiert auch das Produkt $\Pi(1+u_p)$.

132. Man hat die beiden Formeln

$$\prod_{n=2}^{n=\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \prod_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$$

zu beweisen.

133. Man soll den Wert des unendlichen Produktes

$$\prod_{n=0}^{n=\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$$

bestimmen und die Bedingung seiner Konvergenz angeben.

§ 60. Absolut oder unbedingt konvergente Produkte.

I. *Sind die Zahlen u_n von einem gewissen n an sämtlich reell mit demselben Vorzeichen, so konvergiert das unendliche Produkt $\Pi(1+u_n)$*

dann und nur dann, wenn 1. *die Reihe* Σu_n *konvergiert, und* 2. *keine einzige der Zahlen* u_n *den Wert* -1 *hat.*

Ist für $q > n$ immer $u_q > 0$, so ergibt sich auch $1 + u_q \leq e^{u_q}$, und wir erhalten ohne Mühe die Ungleichungen

$$1 + \sum_{s=1}^{s=p} u_{n+s} < \prod_{s=1}^{s=p} (1 + u_{n+s}) < e^{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}},$$

woraus deutlich hervorgeht, daß die Reihe und das Produkt gleichzeitig konvergieren oder divergieren: im Falle der Divergenz divergiert das Produkt nach ∞.

Ist andererseits für $q > n$ immer $u_q \leq 0$, so setzen wir $-u_q$ anstatt u_q, und das neue u_q wird somit entweder positiv oder Null: da nun n so groß angenommen werden darf, daß immer $u_q < 1$ wird, so findet man ohne Mühe die beiden anderen Ungleichungen

$$1 - \sum_{s=1}^{s=p} u_{n+s} < \prod_{s=1}^{s=p} (1 - u_{n+s}) < \frac{1}{\prod_{s=1}^{s=p} (1 + u_{n+s})};$$

die erste wird in der Tat durch vollständige Induktion bewiesen, während die letztere unmittelbar aus der Umgleichung $1 - u_q < 1 : (1 + u_q)$ hervorgeht.

Damit ist unser Satz aber vollständig bewiesen.

Konvergiert das Produkt mit lauter positiven Faktoren $\Pi(1 + u_n)$, so konvergiert auch diejenige Reihe, die aus der Summe rechter Hand in § 59, (11) gebildet wird, wenn man anstatt jedes einzelnen u_n den absoluten Betrag $|u_n|$ einführt.

Denken wir uns daher alle diese Multiplikationen ausgeführt und heben wir aus den so gebildeten Gliedern eine willkürliche unendliche Anzahl heraus, so bilden diese Glieder eine absolut konvergente Reihe; denn die Summe der absoluten Beträge dieser Glieder kann nicht größer als die Summe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder rechter Hand in § 59, (11) sein.

Daraus folgt nun unmittelbar, daß in diesem Falle das Produkt $\Pi(1 + u_n)$ auch konvergiert, wenn keine einzige der Zahlen den Wert -1 hat.

Wenn $\Pi(1 + u_n)$ konvergiert, und stets $u_n \neq -1$, so heißt das Produkt $\Pi(1 + u_n)$ *absolut* konvergent; aus I findet man dann unmittelbar den Satz:

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz des Produktes* $\Pi(1 + u_n)$ *besteht darin, daß* 1. *die Reihe*

Σu_n absolut konvergiert, und daß zweitens keine einzige der Zahlen u_n den Wert -1 hat.

Ist die in I und II eingehende Reihe Σu_n unbedingt konvergent, während das Produkt $\Pi(1+u_n)$ gegen Null divergiert, weil gewisse der Zahlen u_n den Wert -1 haben, so ist dasjenige Produkt, welches man aus $\Pi(1+u_n)$ bilden kann, indem man sämtliche Faktoren Null wegläßt, absolut konvergent.

Das unendliche Produkt $\Pi(1+u_n)$ heißt *unbedingt* konvergent, wenn sein Wert ungeändert bleibt, wenn man seine Faktoren in willkürlicher Weise umordnet. Ist $\Pi(1+u_n)$ unbedingt konvergent, so hat die Reihe $\Sigma\log(1+u_n)$ offenbar dieselbe Eigenschaft.

Um unbedingt konvergente Produkte näher zu untersuchen, beweisen wir zuerst den Hilfssatz:

III. *Wenn keine einzige der Zahlen u_n den Wert -1 hat, so sind die beiden Reihen mit positiven Gliedern $\Sigma|\log(1+u_n)|$ und $\Sigma|u_n|$ gleichzeitig konvergent oder divergent.*

Eine notwendige Konvergenzbedingung ist jedenfalls $\lim u_n = 0$ für $n=\infty$; aus § 23, (20) ergibt sich daher die Beziehung

$$|\log(1+u_{n+s})| = |u_{n+s}|\cdot K_s,$$

wo die positive Zahl K_s für n hinlänglich groß dem Werte 1 beliebig nahe kommt. Setzt man aber in dieser Formel $s=1, 2, 3, \ldots p$, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Gleichungen

$$k\cdot\sum_{s=1}^{s=p}|u_{n+s}| \leqq \sum_{s=1}^{s=p}\log(1+u_{n+s}) \leqq K\cdot\sum_{s=1}^{s=p}|u_{n+s}|,$$

wo K und k bzw. obere und untere Grenze der Zahlen K_s bezeichnen: da nun aber K und k beide endlich und von Null verschieden sind, so ist unser Satz damit bewiesen.

Aus II und III ergibt sich nun der folgende Satz von Dini[1]:

IV. *Die Begriffe absolute und unbedingte Konvergenz eines unendlichen Produktes sind identisch.*

---

134. Sind die Zahlen x und y reell ohne negativ ganz zu sein, so hat man

$$\lim_{n=\infty}\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n)} = \begin{cases}\infty\\ 0\end{cases},$$

je nachdem $x \gtrless y$ angenommen wird.

---

1) Annali di Matematica (2) Bd. 2, p. 35; 1868.

135. Es ist zu beweisen, daß das unendliche Produkt $\Pi \cos(\alpha_n x)$ für alle endlichen x unbedingt konvergiert, wenn erstens die Reihe $\Sigma |\alpha_n|^2$ konvergiert, und wenn zweitens keine einzige der Zahlen $\alpha_n x$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist.

136. Wenn $\Re(x) > 1$ ist, während p sämtliche Primzahlen $2, 3, 5, 7 \cdots$ durchläuft, so hat man die von Euler[1]) gefundene Formel

$$\Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^x}.$$

137. Ist $\Re(x) > 1$, während p sämtliche Primzahlen durchläuft, so hat man das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Koeffizienten a_n in der Entwicklung

$$\Pi \left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = \sum_{n=1}^{x=\infty} \frac{a_n}{n^x}.$$

zu bilden sind.

§ 61. Über bedingt konvergente Produkte.

Das unendliche Produkt $\Pi(1 + u_n)$ heißt *bedingt* konvergent, wenn es zwar konvergiert, das entsprechende Produkt mit positiven Faktoren $\Pi(1 + |u_n|)$ aber divergiert; da die Reihe $\Sigma \log(1 + u_n)$ in diesem Falle auch nur bedingt konvergieren kann, so hat man den Satz:

I. *Die Faktoren eines bedingt konvergenten Produktes können unendlich oft so umgeordnet werden, daß entweder sein absoluter Betrag oder seine Phase einen willkürlichen vorgegebenen Wert annimmt.*

Die Glieder der entsprechenden bedingt konvergenten Reihe $\Sigma \log(1 + u_n)$ können in der Tat unendlich oft umgeordnet werden, sodaß jedenfalls entweder die reelle oder die imaginäre Komponente einen willkürlichen vorgegebenen Wert annimmt; die reelle Komponente dieser Summe stellt aber den Logarithmus des absoluten Betrages, die imaginäre Komponente die Phase des unendlichen Produktes dar. Übrigens wissen wir nicht viel über bedingt konvergente Produkte; wir beweisen aber ohne Mühe den folgenden Satz:

II. *Das unendliche Produkt $\Pi(1 + u_n)$ ist bedingt konvergent, wenn die Reihe Σu_n bedingt, die Reihe Σu_n^2 aber unbedingt konvergiert. Divergiert die erste dieser Reihen, während $\Sigma |u_n|^2$ konvergiert, so ist das vorgelegte Produkt auch divergent.*

1) Introductio in analysin infinitorum § 306; 1748.

Da Σu_n konvergiert, so hat man wegen § 23, (20)

$$\log(1+u_n) = u_n - K_n u_n^2, \tag{1}$$

wo K_n für große n dem Werte $\frac{1}{2}$ sehr nahe kommt; es ist daher auch für alle positive ganze p

$$\sum_{s=1}^{s=p} \log(1+u_{n+s}) = \sum_{s=1}^{s=p} u_{n+s} - \sum_{s=1}^{s=p} u_{n+s}^2 \cdot K_{n+s}, \tag{2}$$

woraus der Satz unmittelbar entfließt. Cauchy[1]) hat denjenigen Fall unseres Satzes II gegeben, in welchem die u_n sämtlich reell sind.

Setzen wir nun in II $u_n = u'_n + iu''_n$, und sind die beiden Reihen $\Sigma|u'_n|$ und $\Sigma|u''^2_n|$ konvergent, während $\Sigma u''_n$ divergiert, so ist das Produkt $\Pi(1+u_n)$ ebenfalls divergent aber jedoch so, daß sein absoluter Betrag endlich und bestimmt ist, während seine Phase unendlich groß wird; der Beweis ist dem folgenden für den Satz von Pringsheim[2]) ganz ähnlich:

III. *Wenn die Elemente der beiden reellen Zahlenfolgen*

$$u'_0, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots \tag{3}$$

$$u''_0, u''_1, u''_2, \ldots, u''_n, \ldots \tag{4}$$

alle von einem gewissen n an dasselbe Zeichen haben, so kann das unendliche Produkt $\Pi(1+u'_n+iu''_n)$, *wenn es überhaupt konvergiert, nur unbedingt konvergieren.*

Setzen wir vorläufig $u'_n = 0$, so ergibt sich wegen (1)

$$\log(1+iu''_n) = iu''_n + u''^2_n K_n;$$

ist nun das Produkt $\Pi(1+iu''_n)$ konvergent, so müssen sowohl sein absoluter Betrag als seine Phase endlich und bestimmt sein und somit müssen die beiden Reihen $\Sigma u''_n$ und $\Sigma u''^2_n$ konvergieren; denn die Glieder dieser beiden Reihen haben von einem gewissen n an dasselbe Vorzeichen. Unser Produkt kann daher in diesem Falle nur unbedingt konvergieren, wenn es überhaupt konvergieren soll.

Aus der Identität

$$1+u'_n+iu''_n = (1+u'_n)\left(1+\frac{iu''_n}{1+u'_n}\right)$$

ergibt sich unmittelbar

$$\Pi(1+u'_n+iu''_n) = \Pi(1+u'_n)\cdot\Pi\left(1+\frac{iu''_n}{1+u'_n}\right); \tag{5}$$

1) Analyse algébrique, p. 562; 1821.

2) Mathematische Annalen, Bd. 33, p. 119—154, 1884. Bd. 44, 413—416; 1894.

soll nun das Produkt linker Hand in (5) konvergieren, muß jedenfalls seine Phase endlich und bestimmt sein; da das erste Produkt rechter Hand reell ist, so muß das letzte Produkt rechter Hand konvergieren, d. h. daß die Reihe $\Sigma u_n''$ konvergieren muß, weil die Glieder dieser Reihe von einen gewissen n an dasselbe Vorzeichen haben, und der Divisor $1 + u_n'$ von einem gewissen n an positiv sein muß. Soll auch der absolute Betrag des Produktes linker Hand in (5) endlich und bestimmt sein, so muß auch das erste Produkt rechter Hand, und somit auch die Reihe $\Sigma u_n''$ konvergieren.

Soll also das vorgelegte Produkt wirklich konvergieren, so müssen die beiden Reihen $\Sigma u_n'$ und $\Sigma u_n''$ unbedingt konvergieren; die Reihe $\Sigma(u_n'' + iu_n'')$ und somit auch das Produkt $\Pi(1 + u_n' + iu_n'')$ sind also auch unbedingt konvergent.

138. Man soll das unendliche Produkt

$$\prod_{p=2}^{p=\infty} \left(1 + \frac{(-1)^p}{\log p}\right)$$

untersuchen.

139. Es ist zu beweisen, daß das Produkt

$$\prod_{p=2}^{p=\infty} \left(1 + \frac{(-1)^p}{p^x}\right)$$

für $1 \geq \Re(x) = \frac{1}{2}$ bedingt konvergiert.

Kapitel XV.

Unendliche Kettenbrüche.

§ 62. Definitionen. Entwicklung in einer Reihe.

Der *endliche* Kettenbruch

$$K = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

wird der Kürze halber als

$$K = \left(a_0;\ \frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \cdots,\ \frac{b_n}{a_n}\right) \tag{1}$$

bezeichnet; für den Annäherungsbruch mit dem Stellenzeiger p, der als $y_p : z_p$ bezeichnet wird, erhalten wir daher den Ausdruck

$$\frac{y_p}{z_p} = \left(a_0;\ \frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \cdots,\ \frac{b_p}{a_p}\right), \tag{2}$$

sodaß für $p = n$

(3) $$K = \frac{y_n}{z_n}$$

sein muß.

Für die ersten Annäherungsbrüche findet man direkt

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{y_1}{z_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}, \qquad \frac{y_2}{z_2} = \frac{a_2 y_1 + b_2 y_0}{a_2 z_1 + b_2 z_0},$$

woraus durch vollständige Induktion die allgemeingültige Formel

(4) $$\frac{y_p}{z_p} = \frac{a_p y_{p-1} + b_p y_{p-2}}{a_p z_{p-1} + b_p z_{p-2}}$$

hervorgeht: denn $y_{p+1} : z_{p+1}$ wird offenbar aus dem Ausdruck für $y_p : z_p$ erhalten, wenn man anstatt a_p die Summe $a_p + b_{p+1} : a_{p+1}$ einführt, während sämtliche vorhergehende a_q und b_q ungeändert bleiben.

Die Formel (4) ist als der Inbegriff der beiden anderen

$$y_p = a_p y_{p-1} + b_p y_{p-2}, \qquad z_p = a_p z_{p-1} + b_p z_{p-2}$$

aufzufassen; eliminiert man a_p aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

(5) $$y_p z_{p-1} - z_p y_{p-1} = -b_p (y_{p-1} z_{p-2} - z_{p-1} y_{p-2});$$

da nun $y_1 z_0 - z_1 y_0 = b_1$ ist, so erhält man aus (5) die allgemeingültige Formel

(6) $$y_p z_{p-1} - z_p y_{p-1} = (-1)^{p-1} b_1 b_2 b_3 \cdots b_p.$$

Dividiert man weiter die Formel (6) durch $z_p z_{p-1}$, so ergibt sich

(7) $$\frac{y_p}{z_p} - \frac{y_{p-1}}{z_{p-1}} = \frac{(-1)^{p-1} b_1 b_2 \cdots b_p}{z_p z_{p-1}},$$

woraus, indem man nacheinander $p - 1$, $p - 2, \ldots 2, 1$ anstatt p einführt und sämtliche Gleichungen addiert, hervorgeht:

(8) $$\frac{y_p}{z_p} = \frac{y_0}{z_0} + \frac{b_1}{z_0 z_1} - \frac{b_1 b_2}{z_1 z_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{z_2 z_3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1} b_1 b_2 \cdots b_p}{z_{p-1} z_p};$$

diese Formel kann somit dazu dienen, den Annäherungsbruch $y_p : z_p$ als eine Summe darzustellen.

Läßt man in (1) n über jede Grenze hinauswachsen, so entsteht ein *unendlicher* Kettenbruch; dieser heißt konvergent, divergent oder oszillierend, je nachdem die aus den Annäherungsbrüchen gebildete Zahlenfolge

(9) $$\frac{y_0}{z_0}, \quad \frac{y_1}{z_1}, \quad \frac{y_2}{z_2}, \quad \ldots, \quad \frac{y_n}{z_n}, \ldots$$

konvergiert, divergiert oder oszilliert.[1])

1) Es ist aber wohl zu beachten, daß der Kettenbruch sehr gut konvergieren kann, obgleich einige der ersten z_p verschwinden, so daß die entsprechenden Näherungsbrüche sinnlos werden.

Die Frage über das Verhalten eines unendlichen Kettenbruches stellt eine Eigentümlichkeit dar, welche bei den unendlichen Reihen und Produkten nicht gefunden werden kann. Sind in der Tat sämtliche Glieder der Reihe Σu_n endlich und sämtliche Faktoren der Produkte $\Pi(1+u_n)$ endlich und von Null verschieden, so hängt das Verhalten der Reihe oder des Produktes ausschließlich von den sehr entfernten Gliedern oder Faktoren ab, während es gleichgültig bleibt, ob man die ersten Glieder und Faktoren durch willkürliche andere, die den oben angegebenen Bedingungen nur genügen, ersetzt. Ganz anders verhält sich die Sache bei einem Kettenbruch; es sei z. B. K der aus (1) für $n=\infty$ erhaltene unendliche Kettenbruch konvergent, während man

$$K_1 = \left(\alpha;\ \frac{\beta}{A-a_0},\ -\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\cdots\right) = \alpha + \frac{\beta}{A-K},\quad \beta \neq 0$$

ersetzt, so ist dieser Kettenbruch auch konvergent außer für $A=K$.

Ein Kettenbruch heißt *regulär*, wenn sämtliche Zahlen b_p den Wert $+1$ haben; der reguläre Kettenbruch

$$K = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3} + \cdots}} \tag{10}$$

wird kürzer als

$$K = (a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots) \tag{11}$$

bezeichnet.

Wir können hier nicht näher auf die Frage über Konvergenzkriterien für unendliche Kettenbrüche eingehen, sondern müssen uns darauf beschränken, auf die Abhandlungen von Pringsheim[1]) und Padé[2]) zu verweisen.

140. Für positive ganze n hat man die beiden endlichen Kettenbrüche

$$\left(0;\ \frac{n}{1},\ \frac{(n-1)^2}{1},\ \frac{(n-2)^2}{1},\ \cdots,\ \frac{2^2}{1},\ \frac{1^2}{1}\right)$$

$$\left(0;\ \frac{n^4}{2n-1},\ \frac{(n-1)^4}{2n-3},\ \frac{(n-2)^4}{2n-5},\ \cdots\ \frac{2^4}{3},\ \frac{1^4}{1}\right)$$

zu bestimmen.

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 28, p. 295—324; 1898. Bd. 35, p. 359—380; 1905.

2) Annales de l' Ecole Normale (3. Bd.) 24, p. 341—400; 1907.

141. Es ist zu beweisen, daß ein positiver irreduzibler Bruch stets in einen ganz bestimmten endlichen Kettenbruch

$$(a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)$$

entwickelt werden kann, wenn $a_1\ a_2 \ldots a_{n-1}$ sämtlich positiv ganz sind, während a_0 und a_n ganze Zahlen bezeichnen, die nicht kleiner als 0 bzw. kleiner als 2 sein dürfen.

§ 63. Verwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch.

Wie schon Euler[1]) gezeigt hat, kann man wegen der Formel § 62, (8) die Summe

$$s_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n \tag{1}$$

in einen Kettenbruch verwandeln; setzt man in der Tat:

$$\frac{y_0}{z_0} = a_0 = 0, \quad \frac{b_1}{z_0 z_1} = u_1, \quad \frac{b_1 b_2}{z_1 z_2} = u_2, \quad \cdots, \quad \frac{b_1 b_2 \cdots b_p}{z_{p-1} z_p} = u_p, \cdots \tag{2}$$

so erhält man aus den Ausdrücken für u_{n-1} und u_n die Beziehungen

$$u_n = \frac{z_{n-2} b_n}{z_n} \cdot u_{n-1}, \qquad \frac{z_{n-2}}{z_n} = \frac{u_n}{b_n u_{n-1}}, \tag{3}$$

woraus wegen § 62, (4) folgt:

$$u_{n-1} - u_n = \frac{z_n - b_n z_{n-2}}{z_n} \cdot u_{n-1} = \frac{a_n z_{n-1}}{z_n} \cdot u_{n-1}. \tag{4}$$

Setzt man demnach in (4) $n-1$ anstatt n, so erhält man durch Multiplikation der beiden so erhaltenen Gleichungen

$$(u_{n-1} - u_n)(u_{n-2} - u_{n-1}) = \frac{z_{n-2} a_{n-1} a_n}{z_n} \cdot u_{n-1} u_{n-2},$$

woraus wegen (3)

$$b_n = \frac{a_{n-1} a_n u_{n-2} u_n}{(u_{n-2} - u_{n-1})(u_{n-1} - u_n)} \tag{5}$$

hervorgeht; diese Formel ist offenbar für $n > 3$ anwendbar, und wir haben somit nur b_1 und b_2 zu bestimmen.

Aus $z_0 = 1$ und $z_1 = a_1$ ergibt sich wegen (2)

$$b_1 = a_1 u_1, \tag{6}$$

woraus sich unter Anwendung der Identitäten $z_2 = a_1 a_2 + b_2$, $b_1 b_2 = z_0 z_2 u_2$ ergibt:

$$b_2 = \frac{a_1 a_2 u_2}{u_1 - u_2}. \tag{7}$$

1) Introductio in analysin infinitorum Bd. I, § 368; 1748.

Führt man nunmehr diese Ausdrücke für die Zahlen b_p in den Kettenbruch $y_n : z_n$ ein, so ergibt sich, daß die Zahlen a_p sämtlich durch Division ausfallen; nach einer einfachen Umänderung erhält man daher für jedes n

$$(8) \qquad s_n = \left(0;\ \frac{u_1}{1},\ \frac{u_2}{u_1 - u_2},\ \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3},\ \cdots,\ \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} - u_n}\right).$$

Läßt man endlich in (1) und (8) die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen, so erhält man unmittelbar den Satz:

I. *Wächst n über jede Grenze hinaus, so werden die aus* (1) *erhaltene unendliche Reihe und der aus* (8) *hervorgehende unendliche Kettenbruch gleichzeitig konvergieren, divergieren oder oszillieren.*

142. Man hat die Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ in unendliche Kettenbrüche zu entwickeln.

143. Es ist die unendliche Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{x+n} + \cdots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln; für $x = \frac{1}{2}$ erhält man dadurch den Kettenbruch von Brouncker.

§ 64. Kettenbrüche von Lambert und Legendre.

Bezeichnet α eine willkürliche endliche Zahl, die weder Null noch negativ ganz ist, so ist die Reihe

$$(1) \quad \varphi(\alpha, x) = 1 + \frac{x^2}{1!\,\alpha} + \frac{x^4}{2!\,\alpha(\alpha+1)} + \frac{x^6}{3!\,\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots$$

für jedes endliche x unbedingt konvergent; setzt man in (1) $\alpha + 1$ anstatt α, so erhält man durch Subtraktion

$$\varphi(\alpha, x) - \varphi(\alpha+1, x) = \frac{x^2}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{x^4}{1!\,\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots,$$

oder

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, x) - \varphi(\alpha+1, x) = \frac{x^2}{\alpha(\alpha+1)} \cdot \varphi(\alpha+2, x).$$

Setzt man demnach

$$(3) \qquad \psi(\alpha, x) = \frac{x^2}{\alpha} \cdot \frac{\varphi(\alpha+1, x)}{\varphi(\alpha, x)},$$

so erhält man wegen (2)

$$\psi(\alpha, x) = \frac{x^2}{\alpha + \psi(\alpha+1, x)},$$

woraus man in *ganz formaler Weise* den unendlichen Kettenbruch

$$(4) \qquad \psi(\alpha, x) = \left(0;\ \frac{x^2}{\alpha},\ \frac{x^2}{x+1},\ \frac{x^2}{\alpha+2}, \cdots\right)$$

herleitet.

Um nun in aller Strenge die Richtigkeit der Formel (4) nachzuweisen, leiten wir für die Zähler und Nenner der ersten Annäherungsbrüche die folgenden Ausdrücke

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = (\alpha+1)x^2, \quad y_3 = (\alpha+1)(\alpha+2)x^2 + x^4$$
$$z_1 = \alpha, \quad z_2 = \alpha(\alpha+1) + x^2, \quad z_3 = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) + 2(\alpha+1)x^2$$

direkt ab. Die Rekursionsformeln

$$y_n = (\alpha+n-1)\,y_{n-1} + x^2 y_{n-2}, \quad z_n = (\alpha+n-1)\,z_{n-1} + x^2 z_{n-2}$$

ergeben dann allgemein

$$z_n = \sum_{s=0}^{< \frac{n}{2}} \binom{n-s}{s} C_{n-2s}(\alpha+s)\,x^{2s}, \tag{5}$$

wo der Kürze halber

$$C_p(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1), \quad C_0(\alpha) = 0$$

gesetzt worden ist, während y_n aus z_{n-1} gebildet wird, indem man $\alpha+1$ anstatt α einführt und mit x^2 multipliziert.

Aus (5) erhält man nach einer einfachen Umformung

$$z_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\cdot F_n(\alpha, x) \tag{6}$$

wo der Kürze halber

$$F_n(\alpha, x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(n-s)(n-s-1\ldots(n-2s+1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+n-s)} \cdot \frac{x^{2s}}{s!\,\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)} \tag{7}$$

gesetzt worden ist; dadurch erhält man aber für jedes n:

$$\frac{y_n}{z_n} = \frac{x^2}{\alpha} \cdot \frac{F_{n-1}(\alpha+1, x)}{F_n(\alpha, x)},$$

so daß uns nur übrig bleibt das Verhalten der Summe $F_n(\alpha, x)$ für unbegrenzt wachsendes n zu untersuchen, indem α weder Null noch negativ ganz angenommen wird.

Bezeichnet u_s das allgemeine Glied unter dem Summenzeichen in (7), so hat man

$$\frac{u_s}{u_{s+1}} = \frac{(n-s)(n-s-1+\alpha)}{(n-2s)(n-2s-1)} \cdot \frac{(s+1)(\alpha+s)}{x^2}, \tag{8}$$

setzt man demnach $|\alpha| \leqq s-1$ und $|x^2| < s+1$ voraus, so hat man wegen (8)

$$\left|\frac{u_s}{u_{s+1}}\right| \geqq \frac{n-s}{n-2s-1} \cdot \frac{s+1}{|x^2|} > 1; \tag{9}$$

denn es ist offenbar unter diesen Voraussetzungen

$$|n-s-1+\alpha \geqq n-s-1-|\alpha| \geqq n-2s, \quad |\alpha+s| \geqq s-|\alpha| \geqq 1.$$

Aus (9) geht aber deutlich hervor, daß die aus (7) für unbegrenzt wachsendes n erhaltene unendliche Reihe für alle endliche $|x|$ absolut konvergiert.

Es sei nun n sehr groß, während s eine solche positive ganze Zahl bedeutet, die z. B. $\sqrt[3]{n}$ nicht übersteigt, also $s < |\sqrt[3]{n}|$; setzen wir dann

$$A_s = \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+n-s)} = \prod_{p=1}^{p=s}\left(1-\frac{\alpha+s-1}{\alpha+n-p}\right),$$

so erhalten wir wegen § 23, (20)

$$|\log A_s| < \sum_{p=1}^{p=s}\left|\log\left(1-\frac{\alpha+s-1}{\alpha+n-p}\right)\right| \leqq \sum_{p=1}^{p=s}\frac{s+|\alpha|-1}{n-p-|\alpha|}\cdot\delta_p,$$

wo δ_p für unbegrenzt wachsendes n dem Grenzwerte 1 zustrebt; da nun $s \leqq |\sqrt[3]{n}|$ ist, so erhält man dadurch

$$|\log A_s| < \delta\cdot\frac{|\sqrt[3]{n}|+|\alpha|-1}{n-|\sqrt[3]{n}|-|\alpha|-1},$$

wo δ obere Grenze der δ_p bezeichnet.

Setzt man daher $A_s = 1+\varepsilon_{n,s}$, so hat man $\lim \varepsilon_{n,s} = 0$ für $n=\infty$, woraus

$$\lim_{n=\infty} F_n(\alpha, x) = \varphi(\alpha, x)$$

folgt, woraus das Ergebnis entfließt:

Der Kettenbruch (4) *konvergiert für unbegrenzt wachsendes n gegen* $\psi(\alpha,x)$, *wenn x und* α *endlich sind, so daß* α *jedoch weder* 0 *noch negativ ganz ist, während x nicht so gewählt werden darf, daß* $\varphi(\alpha, x) = 0$ *wird.*

Aus dem Kettenbruche (4), welchen man Legendre[1]) verdankt, und der später in etwas anderer Form von Bessel[2]) wieder gefunden worden ist, kann man einen Kettenbruch für $\operatorname{tg} x$ herleiten.

---

1) Eléments de géométrie p. 288 (11 Ausg.) Paris 1817.

2) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 31—33. Vgl. mein Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 37; Leipzig 1904. Der dort gegebene von Schlömilch herrührende Beweis ist nicht ganz einwandfrei. Man vergleiche übrigens die Abhandlung von Perron: Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 35, p. 483—504; 1907.

Setzt man in der Tat in (1) $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}x$ anstatt x, so erhält man

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

in ganz ähnlicher Weise ergibt sich

$$\frac{x^2}{2} \cdot \varphi\left(\frac{3}{2}, \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

woraus wegen (4) nach einer einfachen Umformung folgt:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left(0; \frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \frac{x^2}{7}, \cdots\right), \tag{10}$$

und somit ergibt sich, indem man ix anstatt x einführt

$$\operatorname{tg} x = \left(0; \frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, \frac{-x^2}{7}, \cdots\right). \tag{11}$$

Die beiden Kettenbrüche (10) und (11) rühren von Lambert[1]) her und haben in den ältesten Untersuchungen über die Natur der Zahl π eine nicht unwichtige Rolle gespielt. Wir bemerken ausdrücklich, daß Lambert seine Kettenbrüche in aller Strenge[2]) hergeleitet hat.

144. Man hat den regulären von Euler[3]) herrührenden Kettenbruch

$$\frac{e-1}{2} = (0; 1, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots)$$

herzuleiten.

Kapitel XVI.

Doppelreihen nach Pringsheim.

§ 65. Konvergenz, Divergenz und Oszillation.

Aus der unendlichen Doppelfolge $(u_{p,q})$ bilden wir eine neue unendliche Doppelfolge $(S_{p,q})$, indem wir für jedes p und q

$$S_{p,q} = \begin{cases} u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2} + \cdots + u_{0,q} \\ + u_{1,0} + u_{1,1} + u_{1,2} + \cdots + u_{1,q} \\ + u_{2,0} + u_{2,1} + u_{2,2} + \cdots + u_{2,q} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + u_{p,0} + u_{p,1} + u_{p,2} + \cdots + u_{p,q} \end{cases} \tag{1}$$

1) Histoire de l'Académie de Berlin 1768, p. 265—322.

2) Man vergleiche Pringsheim in Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 28, p. 325—337; 1898.

3) Introductio in analysin infinitorum Bd. I, § 381; 1748.

setzen. Wächst hier in ganz willkürlicher Weise sowohl p als q über jede Grenze hinaus, so entsteht eine unendliche Doppelreihe; diese heißt konvergent, divergent oder oszillierend, je nachdem die Doppelfolge $(S_{p,q})$ diese Eigenschaft besitzt. Konvergiert die Doppelreihe mit der Summe S, ist also

$$S = \lim_{p=\infty,\, q=\infty} S_{p,q}, \tag{2}$$

so setzt man auch der Kürze halber

$$S = \sum\sum u_{p,q}. \tag{3}$$

Die einfach unendlichen Reihen

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_{p,n} = u_{p,0} + u_{p,1} + \cdots + u_{p,n} + \cdots \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,q} = u_{0,q} + u_{1,q} + \cdots + u_{n,q} + \cdots \tag{5}$$

heißen die Zeilen- bzw. Kolonnenreihen der Doppelreihe; falls sie konvergieren bezeichnen wir ihre Summen mit s_p bzw. t_q.

Setzt man für jedes n

$$w_n = u_{0,n} + u_{1,n-1} + \cdots + u_{p,n-p} + \cdots + u_{n,0}, \tag{6}$$

so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} w_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \tag{7}$$

die Diagonalsummenreihe der vorgelegten Doppelreihe; falls die Reihe (7) konvergiert, bezeichnen wir ihre Summe mit w.

Aus der Definition (1) ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$\begin{cases} S_{0,q} = u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2} + \cdots + u_{0,q} \\ S_{p,q} - S_{p,q-1} = u_{0,q} + u_{1,q} + u_{2,q} + \cdots + u_{p,q}, \end{cases} \tag{8}$$

wo in der letzten $q \geqq 1$ sein muß; in ähnlicher Weise erhält man

$$\begin{cases} S_{p,0} = u_{0,0} + u_{1,0} + u_{2,0} + \cdots u_{p,0} \\ S_{p,q} - S_{p-1,q} = u_{p,0} + u_{p,1} + u_{p,2} + \cdots u_{p,q}, \end{cases} \tag{9}$$

wo in der letzten $p \geqq 1$ zu setzen ist.

Hieraus ergibt sich weiter für $p \geqq 1$ bzw. $q \geqq 1$

$$u_{0,0} = S_{0,0},\ u_{p,0} = S_{p,0} - S_{p-1,0},\ u_{0,q} = S_{0,q} - S_{0,q-1} \tag{10}$$

und allgemein sowohl für $p \geqq 1$ als $q \geqq 1$

$$(11) \qquad \begin{cases} u_{p,q} = S_{p,q} - S_{p,q-1} - (S_{p-1,q} - S_{p-1,q-1}) \\ u_{p,q} = S_{p-1,q-1} + S_{p,q} - (S_{p,q-1} + S_{p-1,q}). \end{cases}$$

Konvergiert nun unsere Doppelreihe, so erhält man aus (9), ganz wie für einfach unendliche Reihen, die folgende notwendige aber keineswegs hinreichende Bedingung

$$(12) \qquad \lim_{p=\infty,\ q=\infty} u_{p,q} = 0;$$

man hat also speziell für $p = q$ für die Glieder der Hauptdiagonale einer konvergenten Doppelreihe

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} u_{n,n} = 0.$$

Aus der Bemerkung § 27 anfangs auf die Doppelfolge $(S_{p,q})$ angewandt, erhält man hier den Satz:

I. *Eine Doppelreihe kann wohl konvergieren, ohne daß eine einzige ihrer Zeilen- bzw. Kolonnenreihen für irgend einen endlichen Stellenzeiger zu konvergieren braucht.*

Aus (11) erhält man daher auch:

II. *Eine Doppelreihe kann wohl konvergieren, ohne daß ein einziges ihrer Glieder dem Grenzwerte Null zustrebt, wenn der eine Stellenzeiger ohne Grenze wächst, während der andere endlich bleibt.*

Beispiel 1. Setzt man für alle p und q

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{a+1}\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{a^q}\right),\ a > 1,$$

so ist die entsprechende Doppelreihe konvergent mit der Summe 0; man findet aber wegen (10) für $q \geqq 1$ bzw. $p \geqq 1$

$$u_{0,q} = (-1)^q\left(\frac{1}{a^q} + \frac{2}{a+1}\right),\ u_{p,0} = (-1)^p\left(\frac{1}{a^p} + \frac{2}{a+1}\right)$$

und für alle anderen Elemente

$$u_{0,0} = \frac{2}{a+1},\ u_{p,q} = (-1)^{p+q}\left(\frac{2}{a^p} + \frac{2}{a^q}\right).$$

Hier hat man daher

$$\lim_{p=\infty} |u_{p,0}| = \lim_{q=\infty} |u_{0,q}| = \frac{2}{a+1}$$

und allgemein für willkürliche endliche q bzw. p

$$\lim_{p=\infty} |u_{p,q}| = \frac{2}{a^q},\ \lim_{q=\infty} |u_{q,q}| = \frac{2}{a^p}.$$

Ganz wie in § 30 ergibt sich, daß wir uns auch hier auf Doppelreihen mit reellen Gliedern beschränken dürfen.

§ 66. Über Zeilen- und Kolonnenreihen.

Setzt man für $q = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{p=\infty} S_{p,q} = T_q, \tag{1}$$

so hat man wegen § 65, (9)

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,0} = T_0, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,q} = T_q - T_{q-1}, \tag{2}$$

wo in der letzten Gleichung $q = 1, 2, 3, \ldots, n$ sein darf; aus derselben Formel erhält man umgekehrt für $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$S_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=p} u_{n,0} + \sum_{n=0}^{n=p} u_{n,1} + \cdots + \sum_{n=0}^{n=p} u_{n,q}, \tag{3}$$

und daher hat man für $q = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{p=\infty} S_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,0} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,1} + \cdots + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n,q}, \tag{4}$$

falls die $(n+1)$ ersten Zeilenreihen sämtlich konvergieren.

Setzt man in ähnlicher Weise

$$\lim_{q=\infty} S_{p,q} = S_p, \tag{5}$$

so erhält man ganz entsprechende Resultate, und somit entfließt der Satz:

I. *Sind die $(n+1)$ ersten Grenzwerte T_q bzw. S_p endlich und bestimmt, so konvergieren auch die $(n+1)$ ersten Zeilen- bzw. Kolonnenreihen, und umgekehrt.*

Die Existenz und Endlichkeit sämtlicher Grenzwerte T_q bzw. S_p ist daher identisch mit der Konvergenz aller einzelnen Zeilen- bzw. Kolonnenreihen. Aus § 27, I entfließt nun der folgende Satz:

II. *Eine Doppelreihe kann zwar konvergieren, ohne daß eine einzige Zeilen- oder Kolonnenreihe mit endlichem Stellenzeiger zu konvergieren braucht. Es kann dann aber immer nur eine endliche Anzahl dieser Reihen entweder divergieren oder zwischen unendlichen Grenzen oszillieren, sondern es muß das Oszillationsintervall aller Zeilen- oder Kolonnenreihen von einem bestimmten n an beliebig klein werden.*

Beispiel 1. Für die Doppelreihe § 65, Beispiel 1 ist für $q \geqq 1$

$$S_{p,q} - S_{p,q-1} = \frac{(-1)^{p+q}}{a+1} \cdot \left(\frac{2}{a^p} + \frac{a+1}{a^q}\right);$$

die erste Zeilenreihe wird daher in den Grenzen $\pm 1 : (a+1)$, die $(q+1)^{\text{te}}$ für $q \geqq 1$ in den Grenzen $\pm a^{-q}$ oszillieren; analoges gilt für die Kolonnenreihen.

Setzt man der Kürze halber

$$(6) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = \lim_{n=\infty} \left(\lim_{m=\infty} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=m} u_{p,q} \right) = \lim_{p=\infty} \left(\lim_{q=\infty} S_{p,q} \right),$$

so hat man wegen § 27, II den Satz:

III. *Ist außer der Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q} = S$ jede einzelne Zeilenreihe oder jede einzelne Kolonnenreihe konvergent, so konvergiert auch die Reihe der Zeilenreihensummen bzw. diejenige der Kolonnenreihensummen gegen die Summe S, d. h. es ist*

$$(7) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = S \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = S.$$

Aus § 27, II ergibt sich noch die folgende Ergänzung des Satzes III:

IV. *Ist die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ mit konvergenten Zeilen- bzw. Kolonnenreihen eigentlich divergent, so gilt das gleiche für die Reihe der Zeilenreihensummen bzw. Kolonnenreihensummen.*

Aus IV und den zum Satze II in § 27 gemachten Bemerkungen ergibt sich dann weiter:

V. *Auch wenn alle Zeilen bzw. Kolonnenreihen konvergieren, und wenn sowohl die Reihe der Zeilenreihensummen als auch diejenige der Kolonnenreihensummen gegen dieselbe Summe S konvergiert, so kann die betreffende Doppelreihe nichtsdestoweniger divergieren, und zwar allemal uneigentlich, oder oszillieren. Dies muß der Fall sein, wenn die Reihen der Zeilen- und die der Kolonnenreihensummen gegen verschiedene Werte konvergieren.*

Beispiel 2. Setzt man für alle p und q

$$S_{p,q} = \frac{1}{1 + (p-q)^2},$$

so hat man für alle q bzw. alle p

$$\lim_{p=\infty} S_{p,q} = \lim_{q=\infty} S_{p,q} = 0$$

$$\lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} S_{p,q}) = \lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} S_{p,q}) = 0,$$

während $S = \Sigma\Sigma u_{p,q}$ nicht existiert; denn die Doppelreihe oszilliert.

Beispiel 3.

$$S_{p,q} = \frac{p+1}{p+q+1};$$

hier hat man

$$\lim_{q=\infty}(\lim_{p=\infty} S_{p,q}) = 1, \quad \lim_{p=\infty}(\lim_{q=\infty} S_{p,q}) = 0.$$

Hat man durchweg $u_{p,q} \geqq 0$, so ist die Doppelfolge $(S_{p,q})$ eine monoton wachsende; aus den Entwicklungen des § 28 erhält man daher:

VI. *Ist $u_{p,q} \geqq 0$, und bleibt $S_{p,q}$ stets unter einer endlichen Zahl g, so konvergiert die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ gegen eine bestimmte Summe S. Zugleich konvergiert jede Zeilen- und jede Kolonnenreihe, und die Reihe der Zeilen- bzw. Kolonnenreihensummen konvergiert gleichfalls gegen die Summe S.*

VII. *Ist $u_{p,q} \geqq 0$, so zieht jede einzelne der drei Gleichungen*

$$(8) \qquad \sum\sum u_{p,q} = S, \quad \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = S, \quad \sum_{q=0}^{q=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = S$$

die beiden anderen nach sich. Dies gilt auch noch, wenn $+\infty$ an die Stelle der Zahl S tritt.

145. Es ist die Doppelreihe mit der Partialsumme

$$S_{p,q} = \left(\frac{p+1}{p+2}\right)^{q+1}$$

zu untersuchen und ihre einzelnen Glieder $u_{p,q}$ zu bestimmen. (F. Arndt.[1])

§ 67. Über die Diagonalsummenreihen.

Über die in § 65, (7) definierte Diagonalsummenreihe Σw_n gilt der Satz:

I. *$u_{p,q} \geqq 0$, so müssen die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ und die Diagonalsummenreihe Σw_n entweder beide mit derselben Summe konvergieren oder gleichzeitig beide divergieren.*

1) Grunert Archiv Bd. 11, p. 319; 1848.

Da die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder von Σw_n keine Zahl $u_{p,q}$, für welche $p+q>n$ und nicht alle $u_{p,q}$, für welche $p+q=n$ enthalten kann, da weiter die Summe der $2n+1$ ersten Glieder von Σw_n alle Glieder für welche $p+q=n$ und noch andere enthält, so hat man für $n \geqq 1$ immer

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} w_s < S_{n,n} < \sum_{s=0}^{s=2n} w_s .$$

Konvergiert nun die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ mit der Summe S, so ist $S_{n,n} \leq S$, und die Reihe mit positiven Gliedern Σw_s ist demnach konvergent; schreibt man daher die Beziehungen (1) wie folgt

$$(2) \qquad 0 \leq S_{n,n} - \sum_{s=0}^{s=n} w_s < \sum_{s=n+1}^{s=2n} w_s ,$$

so ergibt sich unmittelbar

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} w_n = S = \Sigma\Sigma u_{p,q} .$$

Konvergiert andererseits die Reihe Σw_n, und ist S ihre Summe, so hat man wegen (2)

$$\lim_{n=\infty} S_{n,n} = S$$

woraus vermöge § 28, (5) hervorgeht:

$$\Sigma\Sigma u_{p,q} = \lim_{p=\infty \; q=\infty} S_{p,q} = S .$$

Divergiert aber eine der Reihen $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ und Σw_n, so muß die andere wegen (1) dieselbe Eigenschaft besitzen.

Kombiniert man nun die Sätze I und § 66, VII, so ergibt sich:

II. *Ist* $u_{p,q} \geqq 0$, *so zieht jede einzelne der vier Gleichungen*

$$(3) \quad \Sigma\Sigma u_{p,q} = S, \; \Sigma w_n = S, \; \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = S, \; \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = S$$

die drei anderen nach sich, gleichgültig, ob S *endlich oder unendlich groß ist.*

Über das Verhalten einer beliebigen Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ zu ihrer Diagonalsummenreihe Σw_n beweisen wir nunmehr den folgenden Satz:

III. *Besitzt die konvergente Doppelreihe* $\Sigma\Sigma u_{p,q} = S$ *diejenige*

Eigenschaft, daß die einzelnen Zeilen- bzw. Kolonnenreihen entweder konvergieren oder zwischen endlichen Grenzen oszillieren, so kann die Diagonalsummenreihe Σw_n nur entweder konvergieren oder oszillieren. Im ersteren Fall ist dann noch $\Sigma w_n = S$; im zweiten Falle ist aber die Reihe Σw_n mit der Mittelsumme S summierbar.

Da die Doppelreihe konvergiert, so hat man mit den gewöhnlichen Bezeichnungen für $p \geqq P$, $q \geqq Q$ immer

$$|S_{p,q} - S| < \varepsilon, \quad |S_{p,q}| < |S| + \varepsilon. \tag{4}$$

Aus den Voraussetzungen über die Zeilenreihen erhält man unmittelbar für alle *endlichen* q aber für jedes p, also auch für $p = \infty$

$$|S_{p,q}| < g_1, \tag{5}$$

wo g_1, eine endliche positive Zahl bedeutet. In ähnlicher Weise findet man für alle *endlichen* p aber für jedes q, also auch für $q = \infty$

$$|S_{p,q}| < g_2, \tag{6}$$

wo g_2 ebenfalls eine endliche positive Zahl bedeutet.

Es sei nun g eine solche positive Zahl, die von keiner der drei Zahlen $S + \varepsilon$, g_1 und g_2 überschritten wird, dann bestehen alle drei Beziehungen (4), (5), (6), sobald man die höheren Grenzen durch g ersetzt; man hat demnach schließlich für alle p und q also auch für $p = \infty$ bzw. $q = \infty$ oder $p = \infty$ und $q = \infty$

$$|S_{p,q}| < g. \tag{7}$$

Da die Partialsumme der Reihe Σw_n:

$$W_m = w_0 + w_1 + \cdots + w_m$$

sämtliche Glieder $u_{p,q}$ für welche $p + q \leqq m$ ist, und keine andere enthält, und da wegen § 65, (9)

$$u_{p,0} + u_{p,1} + \cdots + u_{p,q} = S_{p,q} - S_{p,q-1}$$

ist, so erhält man unmittelbar

$$W_m = S_{m,0} + S_{m-1,1} + \cdots + S_{0,m} - (S_{m-1,0} + S_{m-2,1} + \cdots + S_{0,m-1}),$$

woraus, indem man $m = 1, 2, 3, \ldots n$ einführt und noch die Identität

$$W_0 = S_{0,0}$$

anwendet, die Relation hervorgeht:

$$\sum_{p=0}^{p=n} W_p = \sum_{p=0}^{p=n} S_{n-p,p}. \tag{8}$$

Der Ungleichung (7) wegen darf man den Satz § 29, I für $a_n = n$ anwenden, und es ergibt sich dann

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_0 + W_1 + \cdots + W_n}{n+1} = S; \tag{9}$$

d. h. die Reihe Σw_n ist mit der Mittelsumme S unsummierbar. Konvergiert aber Σw_n mit der Summe W, so hat man wegen § 34, I $W = S$.

Es bleibt uns also noch übrig zu zeigen, daß die Reihe Σw_n niemals eigentlich divergieren kann, daß also

$$\lim_{n=\infty} w_n = +\infty \quad \text{bzw.} \lim_{n=\infty} w_n = -\infty$$

nicht sein kann; dies folgt unmittelbar aus § 34, II. Andererseits kann aber wohl die Reihe Σw_n möglicherweise zwischen unendlichen Grenzen oszillieren.

§ 68. Beispiele.

Die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen werden illustriert, wenn wir allgemein

$$u_{p,q} = v_{p+q} - v_{p+q+1} \tag{1}$$

setzen, indem die Reihe Σv_n konvergieren soll. Für die Zeilenreihen- bzw. Kolonnenreihensummen finden wir unmittelbar die Ausdrücke

$$S_p = v_p, \quad T_q = v_q; \tag{2}$$

weiter hat man wegen (1)

$$S_{m,n} = \sum_{p=0}^{p=m} v_p - \sum_{p=n+1}^{p=m+n+1} v_p = \sum_{p=0}^{p=n} v_p - \sum_{p=m+1}^{p=m+n+1} v_p; \tag{3}$$

d. h. unsere Doppelreihe ist konvergent mit derselben Summe wie die einfache Reihe Σv_n.

Für das allgemeine Glied der Diagonalsummenreihe w_n hat man hier

$$w_n = (n+1)(v_n - v_{n+1}), \tag{4}$$

woraus

$$\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \left(\sum_{p=0}^{p=n} v_n\right) - (n+1)v_{n+1} \tag{5}$$

folgt; die Reihe Σw_n ist daher dann und nur dann konvergent,

wenn nv_n für $n = \infty$ einem endlichen und bestimmten Grenzwerte zustrebt; d. h. es muß notwendigerweise

$$\lim_{n=\infty} nv_n = 0 \tag{6}$$

sein, wenn die Reihe Σw_n konvergieren soll; man hat daher in diesem Falle

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} w_p = \Sigma\Sigma u_{p,q} = \sum_{p=0}^{p=\infty} v_p. \tag{7}$$

Beispiel 1:

$$v_n = \frac{1}{(n+1)^x},\quad v_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)\log(n+2)}$$

Aus (5) und (6) folgt aber unmittelbar, daß die Reihe Σw_n in keinem Falle eigentlich divergieren kann.

Es bleibt also nur die Möglichkeit offen, daß

$$l = \liminf_{n=\infty} (nv_n) \neq \limsup_{n=\infty} (nv_n) = L \tag{8}$$

ist; in diesem Falle oszilliert die Reihe Σw_n vermöge (5) zwischen den Grenzen

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} v_p - L,\quad \sum_{p=0}^{p=\infty} v_p - l. \tag{9}$$

Beispiel 2. $v_n = (-1)^n : (n+1)$, $l = -1$, $L = +1$, $\Sigma v_n = \log 2$ die Grenzen (9) werden also hier $\log 2 - 1$ und $\log 2 + 1$.

Beispiel 3. $v_n = (-1)^n (n+1)^{-\frac{1}{2}}$, $l = -\infty$, $L = +\infty$; Σw_n oszilliert zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$.

Beispiel 4. Ist $\Sigma\Sigma u_{p,q} = S$ eine solche konvergente Doppelreihe, daß die Reihe Σw_n auch konvergiert, also die Summe S hat, und ersetzt man die beiden ersten Zeilen in unserer Doppelreihe für alle q durch $u_{0,q} + v_q$, $u_{1,q} - v_q$, wo die Zahlenfolge

$$v_0\ v_1\ v_2 \dots v_n \dots \tag{10}$$

ganz beliebig ist, so ist diese neue Doppelreihe auch mit der Summe S konvergent. Bezeichnen w'_n die Diagonalsummen dieser neuen Doppelreihe, so hat man

$$w'_0 = w_0 + v_0,\ w'_n = w_n - v_{n-1} + v_n,\ n \geqq 1; \tag{11}$$

daher ist auch

$$\sum_{p=0}^{p=n} w'_p = \left(\sum_{p=0}^{p=n} w_p\right) + v_n. \tag{12}$$

Ist nun erstens die Zahlenfolge (10) konvergent mit dem Grenzwerte V, so *divergieren* die beiden ersten Zeilenreihen unserer neuen Doppelreihe, und die entsprechende Diagonalsummenreihe $\Sigma w_n'$ konvergiert zwar, aber mit der Summe $S + V$, also mit einer anderen Summe als die Doppelreihe selbst; dies ist z. B. für $v_n = 1$ der Fall.

Ist zweitens die Zahlenfolge (10) eigentlich divergent, so hat die Reihe $\Sigma w_n'$ dieselbe Eigenschaft.

Die Diagonalsummenreihe $\Sigma w_n'$ verliert also hier tatsächlich die im Satze § 67, I ausgesprochene Eigenschaft, weil die zwei ersten Zeilenreihen der entsprechenden Doppelreihe *divergieren*.

§ 69. Absolut konvergente Doppelreihen.

Die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ heißt *absolut* konvergent, wenn die aus den absoluten Beträgen $|u_{p,q}|$ ihrer Glieder gebildete Doppelreihe $\Sigma\Sigma|u_{p,q}|$ konvergiert; wir haben also hier vor allem zu beweisen, daß die erstere Reihe konvergiert, wenn die zweite diese Eigenschaft besitzt.

Werden die folgenden Summationen über dieselben Werte von p und q ausgedehnt, so hat man sicher

$$|\Sigma u_{p,q}| \leqq \Sigma|u_{p,q}|,$$

und somit ist auch

$$|S_{p+r,q+s} - S_{p,q}| \leqq S'_{p+r,p+s} - S'_{p,q},$$

wo $S'_{p,q}$ die Summe der absoluten Beträge $|u_{m,n}|$ der in $S_{p,q}$ vorkommenden $u_{m,n}$ bezeichnet. Die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ ist daher sicher konvergent, wenn dies mit $\Sigma\Sigma|u_{p,q}|$ der Fall ist.

Die absolut konvergenten Doppelreihen sind den konvergenten Doppelreihen mit positiven Gliedern sehr ähnlich; insbesondere gilt der Satz:

1. *Ist die Doppelreihe* $\Sigma\Sigma u_{p,q} = S$ *absolut konvergent, so konvergiert auch absolut* 1. *jede einzelne Zeilen- und Kolonnenreihe,* 2 *die Reihe der Zeilen- und Kolonnenreihensumme, und es ist*

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = S, \quad \sum_{q=0}^{q=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = S,$$

3. *die Diagonalsummenreihe* Σw_n *und zwar auch dann, wenn*

man sie als eine einfache Reihe mit den in ihr enthaltenen Gliedern $u_{p,q}$ *auffaßt, und es ist auch hier*

$$\sum\sum u_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=\infty} w_n = S. \tag{2}$$

Da die Doppelreihe $\Sigma\Sigma|u_{p,q}$ konvergiert, so müssen den Sätzen § 66, VI und § 67, I zufolge sämtliche im Satze I erwähnten Reihen absolut konvergieren. Es handelt sich also nur noch darum zu zeigen, daß diese Reihen sämtlich die Summe S haben müssen. Die Gleichungen (1) sind aber unmittelbare Folgen des Satzes § 28, (4) während (2) direkt aus § 67, III hergeleitet werden kann.

Der Satz I läßt sich ohne weiteres in folgender Weise umkehren bzw. verallgemeinern:

II. *Von den vier Gleichungen*

$$\begin{cases} \Sigma\Sigma u_{p,q} = S, \sum\limits_{q=0}^{q=\infty}\sum\limits_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = S, \sum\limits_{p=0}^{p=\infty}\sum\limits_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q} = S \\ \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} (u_{0,n} + u_{1,n-1} + u_{2,n-2} + \cdots + u_{n,0}) = S \end{cases} \tag{3}$$

zieht jede einzelne die drei anderen nach sich, wenn die in der Voraussetzung auftretende Reihe noch konvergent bleibt, wenn man anstatt jedes $u_{p,q}$ *den entsprechenden absoluten Betrag* $|u_{p,q}|$ *einführt.*

Aus der letzteren Annahme folgt nämlich wegen § 66, VII, daß die Doppelreihe $\Sigma\Sigma\ |u_{p,q}|$ konvergiert, daß also die Doppelreihe $\Sigma u_{p,q}$ absolut konvergiert, und II folgt dann unmittelbar aus I.

In II ist offenbar der folgende, von Cauchy[1]) herrührende Satz als Spezialfall enthalten:

III. *Konvergieren alle Zahlen der Doppelfolge* $(u_{p,q})$, *und hat die entsprechende Doppelreihe* $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ *die Eigenschaft, daß ihre Zeilenreihensummen eine konvergente Reihe mit der Summe S bilden, so konvergieren sämtliche Kolonnenreihen und die Reihe ihrer Summen ist ebenfalls mit der Summe S konvergent, falls die vorausgesetzten Konvergenzeigenschaften bei Vertauschung der* $u_{p,q}$ *mit ihren absoluten Beträgen erhalten bleiben.*

---

1) Analyse algébrique p. 541; 1821.

§ 70. Unbedingt konvergente Doppelreihen.

Die konvergente Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ heißt *unbedingt* konvergent, wenn jede durch Umordnung der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe gegen dieselbe Summe konvergiert, wie die ursprüngliche.

Dabei betrachten wir dann und nur dann die Doppelreihe $\Sigma\Sigma v_{r,s}$ aus $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ durch Umordnung der Glieder hervorgegangen, wenn jedem Gliede $u_{p,q}$ ein ihm gleiches $v_{r,s}$ entspricht und umgekehrt. Es muß also jedes Glied, das in der Doppelfolge $(u_{p,q})$ an einer bestimmten endlichen Stelle erscheint, auch in der Doppelfolge $(v_{r,s})$ eine bestimmte endliche Stelle einnehmen und umgekehrt.

Mit dieser Definition gilt der Satz:

I. *Jede absolut konvergente Doppelreihe ist auch unbedingt konvergent.*

Setzt man $u_{p,q} = v_{r,s}$ und ist $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ absolut konvergent, so hat man

$$\Sigma\Sigma |\, v_{p,q} \,| = A,$$

wo A endlich und bestimmt ist; jede *begrenzte* Doppelsumme aus den $|\, v_{r,s} \,|$ bleibt daher stets unter A, und somit konvergiert die Doppelreihe $\Sigma\Sigma |\, v_{r,s} \,|$, d. h. die Doppelreihe $\Sigma\Sigma v_{r,s}$ konvergiert unbedingt; aus dem Satze § 67, III ergeben sich dann die beiden Beziehungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} (u_{0,n} + u_{1,n-1} + \ldots + u_{n,0}) = \Sigma\Sigma u_{p,q} \\ \sum\limits_{n=\infty}^{n=\infty} (v_{0,n} + v_{1,n-1} + \ldots + v_{n,0}) = \Sigma\Sigma v_{r,s}. \end{cases}$$

Jede dieser einfach unendlichen Reihen ist absolut konvergent, auch wenn man die $u_{p,q}$ bzw. $v_{r,s}$ als Reihenglieder auffaßt; da die eine dieser Reihen durch Umordnung der Glieder der anderen gebildet ist, so hat man

$$(2) \qquad \Sigma\Sigma u_{p,q} = \Sigma\Sigma v_{r,s}.$$

Um den Satz I umkehren zu können bemerken wir zuerst, daß jede unendliche Zahlenfolge

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

sich auf unendlich viele Arten als eine unendliche Doppelfolge anordnen läßt, am einfachsten etwa in folgender Weise:

Die Zeile mit dem Stellenzeiger 0 heiße

$$u_1,\ u_4,\ u_9,\ \ldots,\ u_{n^2},\ \ldots$$

diejenige mit dem Stellenzeiger n aber

$$u_{n^2+1},\ u_{n^2+2},\ u_{n^2+3},\ \ldots,\ u_{n^2+n},\ \ldots$$

Bezeichnet nun $S_{p,q}$ die Summe aller derjenigen Glieder dieser Doppelfolge, welche den p ersten Zeilen und den q ersten Kolonnen angehören, so hat man speziell

$$S_{n,n} = \sum_{r=1}^{r=n^2} u_r. \tag{3}$$

Wenn nun

$$\lim_{n=\infty} S_{n,n} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n=\infty} S_{n,n} = -\infty$$

oder auch

$$\liminf_{n=\infty} S_{n,n} \neq \limsup_{n=\infty} S_{n,n},$$

so ist sicher, daß $S_{p,q}$ für $p=\infty$, $q=\infty$ keinen bestimmten Grenzwert haben kann, und daß die aus unserer Zahlenfolge in der oben angegebenen Weise gebildete Doppelreihe unter keinen Umständen konvergieren kann.

Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir nunmehr den Hilfssatz:

II. *Eine konvergente Doppelreihe, welche nicht absolut konvergiert, läßt sich stets durch Umordnung der Glieder divergent machen; sie kann also keinesfalls unbedingt konvergieren.*

Ist die zu betrachtende Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{p,q}$, so muß die entsprechende Diagonalsummenreihe

$$\Sigma\,(u_{0,n} + u_{1,n-1} + \ldots + u_{n,0}) \tag{4}$$

sowohl positive als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten, und die Reihe der positiven und diejenige der negativen Glieder in (4) müssen beide divergieren; denn sonst wäre ja die Reihe (4) entweder absolut konvergent oder eigentlich divergent. Die positiven Glieder in (4) werden als

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \quad \text{(A)}$$

die negativen als

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ \ldots,\ -b_n,\ \ldots \quad \text{(B)}$$

bezeichnet.

Nun entnehme man der Reihe (A) so viele positive Glieder, daß ihre Summe $\geqq 1$ ausfällt und füge nötigenfalls noch so viele ebensolche Glieder hinzu, daß ihre Anzahl eine Quadratzahl n_1^2 wird. Ordnet man dann diese n_1^2 Glieder nach dem oben angegebenen Verfahren zu einem quadratischen Schema Q_1, so hat man

$$S_{n_1, n_1} \geqq 1. \tag{5}$$

Jetzt füge man zu der Summe S_{n_1, n_1} so viele negative Glieder aus der Reihe (B), daß die Summe aller so erhaltenen Zahlen $\leqq -1$ wird, und nötigenfalls weitere negative Glieder, bis die Anzahl sämtlicher mitgenommenen Glieder wiederum eine Quadratzahl $n_2^2 \geqq (n_1+1)^2$ wird. Durch Verlängerung der einzelnen Zeilen und Kolonnen in Q_1 erhält man dadurch ein neues quadratisches Schema Q_2 mit n_2^2 Gliedern, und es ist

$$S_{n_2, n_2} \leqq -1. \tag{6}$$

In analoger Weise bildet man aus Q_2 durch Hinzufügung von positiven Gliedern ein neues Schema Q_3 mit n_3^2 Gliedern und so daß

$$S_{n_3, n_3} \geqq 2 \tag{7}$$

wird, alsdann durch Hinzufügung von negativen Gliedern das Schema Q_4 mit n_4^2 Gliedern, und so daß

$$S_{n_4, n_4} \leqq -2 \tag{8}$$

wird.

Durch dies Verfahren erhält man das Schema Q_{2p-1} mit n^2_{2p-1} Gliedern, so daß

$$S_{n_{2p-1}, n_{2p-1}} \geqq p \tag{9}$$

wird, und darnach Q_{2p} mit n^2_{2p} Gliedern, so daß

$$S_{n_{2p}, n_{2p}} \leqq -p \tag{10}$$

ist.

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Methode entsteht also aus den Gliedern von $\Sigma\Sigma u_{p,q}$ eine zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ oszillierende Doppelreihe, und damit ist II bewiesen.

Aus II findet man nun weiter:

III. *Jede unbedingt konvergente Doppelreihe ist auch absolut kon-*

vergent, so daß die Begriffe absolut und unbedingt konvergente Doppelreihen identisch sind.

Als Beispiele bedingt konvergenter Doppelreihen erwähnen wir solche konvergente Doppelreihen, bei denen irgend eine Zeilen- oder Kolonnenreihe divergiert oder bei denen die Diagonalsummenreihe divergiert.

Wir erwähnen noch, daß Pringsheim[1]) auch Konvergenzkriterien für Doppelreihen angegeben hat, und leiten die Aufmerksamkeit auf die Arbeiten über Doppelreihen von Stolz[2]) und London[3]) hin.

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 27, p. 141—152; 1897.
2) Mathematische Annalen Bd. 24, p. 154—171; 1884.
3) Ebenda Bd. 53, p. 359—370; 1900.

DRITTER TEIL.

REIHEN
MIT VERÄNDERLICHEN GLIEDERN.

Kapitel XVII.

Zahlenmengen.

§ 71. Äquivalenz und Häufungsstellen.

Eine Sammlung reeller Zahlen bildet eine *reelle Zahlenmenge*[1]), wenn wir ein, jedenfalls theoretisches, Mittel besitzen, um zu entscheiden, ob eine vorgelegte Zahl der Menge angehört oder nicht.

Beispiel 1. Eine willkürliche Zahlenfolge $a_0\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots$ ist eine Zahlenmenge.

Beispiel 2. Sämtliche rationale zwischen 0 und 1 gelegene Zahlen bilden eine Zahlenmenge.

Beispiel 3. Die Sammlung aller zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen bildet eine Zahlenmenge.

Wenn die Definition der Zahlen einer Menge auch so beschaffen ist, daß sie dasselbe Element der Menge mehrmals geben kann, so ist dennoch jedes dieser Elemente ein und nur einmal mitzurechnen.

Beispiel 4. Die Menge aller rationalen Zahlen wird durch die endlichen ganzen Zahlen und die irreduziblen Brüche, deren Nenner nicht Null ist, vollständig erschöpft.

Eine Zahlenmenge heißt *endlich*, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Elementen enthält; im anderen Falle heißt die Menge *unendlich;* hier haben wir ausschließlich Mengen der letzten Gattung zu betrachten.

Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn es möglich ist, zwei endliche Zahlen A und B, $A > B$, anzugeben, so daß kein Element der Menge größer als A und keins kleiner als B ist; sonst heißt die Menge nicht-abgeschlossen.

Beispiel 5. Die rationalen zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen

1) Der Grund zur Mengenlehre ist von G. Cantor gelegt worden; von ihm rühren sämtliche in den folgenden Paragraphen entwickelten Sätze außer vielen anderen her; nur über die fundamentalsten habe ich die Quellenzitate hinzugefügt.

bilden eine abgeschlossene, sämtliche rationale Zahlen aber eine nicht-abgeschlossene Zahlenmenge.

Jede abgeschlossene endliche Menge hat sowohl ein größtes als ein kleinstes Element; dies findet im allgemeinen nicht bei unendlichen Mengen statt.

Beispiel 6. Die aus den zwischen 0 und 1 gelegenen rationalen Zahlen gebildete Menge hat weder ein kleinstes noch ein größtes Element.

Ganz wie in § 13 beweist man aber den Satz:

I. *Jede abgeschlossene unendliche Zahlenmenge hat sowohl eine obere Grenze G als eine untere Grenze g; d. h. es existieren zwei endliche und bestimmte Zahlen G und g, die den beiden folgenden Bedingungen Genüge leisten:*

1. *Für jedes Element a der Menge hat man*

$$a \leq G, \quad a \geqq g. \tag{1}$$

2. *Die Menge enthält mindestens ein Element a', so daß*

$$a' > G - \varepsilon \tag{2}$$

ist, und außerdem mindestens ein Element a'', so daß

$$a'' < g + \varepsilon \tag{3}$$

ist, indem ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe bedeutet.

Ist G bzw. g ein Element der Menge, so heißt G bzw. g *Maximal-* oder *Maximalwert* der Menge.

Wenn die Elemente der Menge wohl sämtlich endlich sind, aber so, daß man keine Zahl angeben kann, die größer bzw. kleiner als alle diese Elemente ist, so sagt man, daß diese Menge die obere Grenze $+\infty$ bzw. die untere Grenze $-\infty$ hat.

Beispiel 7. Die Menge aller positiven rationalen Zahlen hat die obere Grenze $+\infty$ die untere Grenze 0, während die Menge aller negativen rationalen Zahlen die obere Grenze 0 und die untere Grenze $-\infty$ hat.

Die Zahl ω heißt Häufungsstelle einer Menge, wenn unendlich viele Elemente der Menge zwischen $\omega + \varepsilon$ und $\omega - \varepsilon$ liegen, wie klein die positive Größe ε auch angenommen wird; ganz wie in § 12 beweisen wir den Satz:

II. *Jede unendliche abgeschlossene Zahlenmenge hat mindestens eine Häufungsstelle.*

Die aus den Häufungsstellen einer Menge A gebildete neue Zahlenmenge A' heißt die aus A *abgeleitete Menge.* Die Menge A

liegt überall dicht zwischen α und β, wenn ihre abgeleitete Menge A' sämtliche Zahlen x, die der Bedingung $\alpha < x < \beta$ genügen, enthält.

Beispiel 8. Die Menge aller zwischen 0 und 1 gelegenen rationalen Zahlen liegt überall dicht zwischen 0 und 1; die Menge aller zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen ist mit ihrer abgeleiteten Menge identisch.

Ganz wie in § 13 finden wir nun weiter den Satz:

III. *Ist die obere bzw. untere Grenze einer abgeschlossenen Menge nicht selbst ein Element dieser Menge, so ist G bzw. g Häufungsstelle dieser Menge.*

Wie in § 14 beweist man noch den folgenden Satz:

IV. *Die zu einer abgeschlossenen Menge A gehörige abgeleitete Menge hat immer sowohl ein größtes als ein kleinstes Element L und l; die so bestimmten Zahlen L und l heißen limes superior und limes inferior der ursprünglichen Menge A.*

Die Zahlen L und l genügen daher den folgenden Bedingungen:

1. *Wie klein die positive Größe σ auch angenommen wird, so hat die Menge A dennoch nur eine endliche Zahl von Elementen a, so daß*

$$a > L + \sigma, \quad a < l - \sigma$$

ist.

2. *Andererseits sind aber die Ungleichungen*

$$a > L - \delta, \quad a < l + \delta$$

von unendlich vielen Elementen der Menge befriedigt, wie klein die positive Größe δ auch angenommen wird.

Weiter findet man

V. *Hat eine abgeschlossene unendliche Menge keinen Maximal- bzw. Minimalwert, so sind die obere Grenze und limes superior bzw. untere Grenze und limes inferior dieser Menge identisch.*

Zwei Zahlenmengen A und B heißen *äquivalent*, wenn jedem Element in A ein ganz bestimmtes Element in B entspricht und umgekehrt. Enthalten die Mengen mehr als ein einziges Element, kann eine solche Zusammengehörigkeit stets in mehr als einer Weise hervorgebracht werden.

Die Äquivalenz zwischen A und B wird kurz durch das Symbol $A \sim B$ bezeichnet.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar der Satz:

VI. *Hat man $A \sim C$ und $B \sim C$, so ist auch $A \sim B$.*

Zwei *endliche* Zahlenmengen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleich viele Elemente enthalten.

§ 72. Abzählbare Mengen.

Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie mit der Menge der positiven ganzen Zahlen äquivalent ist, also wenn ihre Elemente als eine Zahlenfolge geordnet werden können; man hat daher den Satz:

I. *Zwei willkürliche abzählbare Mengen sind stets äquivalent.*

Die Menge A heißt *Teilmenge* der anderen Menge B, wenn sämtliche Elemente von A in B enthalten sind; mit dieser Definition hat man den Satz:

II. *Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist selbst abzählbar.*

Durchlaufen wir die gegebene Menge

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

und bezeichnen wir mit $a_{p_1} = b_1,\ a_{p_2} = b_2,\ \ldots,\ a_{p_m} = b_m,\ \ldots$ das erste, zweite ... m^{te} ... Element der Menge (1), welches der Teilmenge angehört, so wird die Teilmenge

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_m,\ \ldots, \tag{2}$$

also eine abzählbare Menge.

Aus I und II erhält man nun weiter unmittelbar den Satz:

III. *Ist A eine unendliche Teilmenge der abzählbaren Menge B, so hat man stets $A \sim B$.*

Die *Vereinigungsmenge* $A + B$ der zwei Mengen A und B ist diejenige aus den Elementen in A und den davon verschiedenen Elementen in B; die Vereinigungsmenge der drei Mengen A, B und C kann daher durch

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C \tag{3}$$

definiert werden, und das assoziative Prinzip ist somit für diese symbolische Addition anwendbar. Unter Zuhilfenahme von (3) bildet man nun auch ohne Mühe die Vereinigungsmenge einer willkürlichen Anzahl von gegebenen Mengen.

Beispiel 1. Ist A die Menge aller positiven rationalen Zahlen, B die Menge aller positiven Quadratwurzeln der Elemente in A, C die Menge aller positiven Biquadratwurzeln der Elemente in A, so wird $A + B$ gebildet, indem man zu den Elementen in A die irrationalen Elemente in B hinzufügt, und $A + B + C$ wird erhalten,

wenn man zu $A + B$ die Biquadratwurzeln von nicht-Quadratzahlen hinzufügt.

Beispiel 2. Ist A eine Teilmenge von B, so hat man $A + B = B$.

Über Vereinigungsmengen haben wir den folgenden Satz von G. Cantor[1]):

IV. *Sind die einzelnen Elemente der unendlichen Folge*

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots \tag{4}$$

abzählbare Mengen, so ist ihre Vereinigungsmenge auch abzählbar.

Es seien in der Tat

$$a_{p,1}\ a_{p,2}\ a_{p,3}\ \ldots, a_{p,q}, \ldots \tag{5}$$

sämtliche Elemente in A_p, die nicht in irgendeiner der vorhergehenden Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p-1}$ vorkommen, dann ist die Menge (5) entweder endlich oder abzählbar; für $p = 1$ ist (5) eine unendliche Menge.

Die Elemente der aus (5) und den analogen Mengen gebildeten Menge werden nun z. B. in folgender Weise

$$a_{1,1};\ a_{1,2},\ a_{2,1};\ a_{1,3},\ a_{2,2},\ a_{3,1};\ a_{1,4},\ a_{2,3},\ a_{3,2},\ a_{4,1};\ \ldots \tag{6}$$

geordnet, so daß man in jeder einzelnen Gruppe sämtliche Elemente $a_{p,q}$ mit derselben Indexsumme $p + q$ vereinigt.

Bezeichnen wir demnach die Elemente (6) als

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r, \ldots, \tag{7}$$

so ist sicher, daß die endliche aus den N ersten Elemente in (7) gebildete Menge *sämtliche* Elemente $a_{p,q}$ von (6), für welche $p + q \leq n$ ist, enthält, wenn

$$N \geqq \frac{n\,(n+1)}{2}$$

angenommen wird. Damit ist unser Satz aber bewiesen; denn die Menge (7) ist eine Zahlenfolge, also abzählbar.

§ 73. Das Liniekontinuum.

Diejenige Zahlenmenge, deren Elemente sämtliche zwischen a und b gelegene reelle Zahlen sind, heißt das zwischen a und b gelegene *Liniekontinuum* und wird durch das Symbol $[a, b]$ bezeichnet. Man sagt, daß die Zahl x das Liniekontinuum $[a, b]$ oder das Intervall $[a, b]$ durchläuft, wenn x sämtlichen Elementen dieses Kontinuums gleichgesetzt werden darf. Es muß dann in jedem einzelnen Falle

1) Journal für Mathematik Bd. 84, p. 243; 1877.

angegeben werden, ob die Enden a und b des Intervalles mitgerechnet werden sollen oder nicht.

I. *Zwei willkürliche Kontinuen sind immer äquivalent.*

Setzen wir zuerst die Zahlen a, b, c und d als *endlich* voraus, und setzen wir noch

$$\frac{y-c}{d-c} = \frac{x-a}{b-a'} \tag{1}$$

so sind x und y durch diese Gleichung eindeutig verbunden, und wenn x das Kontinuum $[a, b]$ durchläuft, muß y gleichzeitig das Kontinuum $[c, d]$ durchlaufen und umgekehrt; man hat daher

$$[a, b] \sim [c, d]; \tag{2}$$

setzt man noch in (1) $c = 0$, $d = 1$, so erhält man

$$[a, b] \sim [0, 1]. \tag{3}$$

Um nun auch die Äquivalenz

$$[0, 1] \sim [0, \infty] \tag{4}$$

herzuleiten, bemerken wir, daß $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \sim [0, 2]$ ist; setzen wir dann weiter $xy = 1$, so erhalten wir auch $\left[0, \frac{1}{2}\right] \sim [2, \infty]$, und damit ist (4) bewiesen.

Die Kontinuen sind Zahlenmengen ganz anderer Natur als die abzählbaren Mengen; man hat in der Tat den folgenden fundamentalen Satz von G. Cantor[1]):

II. *Das Kontinuum ist nicht abzählbar.*

Den beiden Formeln (3) und (4) zufolge können wir uns darauf beschränken das Kontinuum $[0, 1]$ zu betrachten. Dem Satze § 7, I zufolge kann nun jedes einzelne Element des soeben genannten Kontinuums in eindeutiger Weise als ein unendlicher Dezimalbruch

$$0, b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots, \tag{5}$$

wo die Ziffern von einem bestimmten Platze an nicht sämtlich gleich Null sind, dargestellt werden.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nunmehr den Cantorschen Satz antithetisch beweisen. Denken wir uns in der Tat das Kontinuum $[0, 1]$ abzählbar, so können seine Elemente als eine Zahlenfolge

$$m_1, m_2, m_3, \cdots, m_p, \cdots \tag{6}$$

1) Journal für Mathematik, Bd. 77, p. 260; 1873. Mathematische Annalen, Bd. 15, p. 5; 1879.

geordnet werden, wo nach (5), für $p = 1, 2, 3, \cdots$

$$m_p = 0, \alpha_{p,1}\, \alpha_{p,2}\, \alpha_{p,3} \cdots \alpha_{p,q} \cdots \tag{7}$$

ist.

Wir bestimmen demnach für jedes p eine Zahl a_p, so daß nur $a_p \neq \alpha_{p,p}$ ist; die unendlich vielen Dezimalbrüche

$$\omega = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_p \cdots, \tag{8}$$

die sicher dem Kontinuum $[0, 1]$ angehören, sind daher nicht in der Folge (6) zu finden; denn man hat für jedes p, $\omega \neq m_p$, weil die beiden Dezimalbrüche ω und m_p ihre p^{te} Ziffer *verschieden* haben. Dies ist aber mit unserer Annahme, daß die Zahlenfolge (6) sämtliche Elemente unseres Kontinuums enthalten sollte, im Widerspruch. Das Kontinuum ist demnach nicht abzälbar.

Diesen eleganten Beweis verdankt man G. Cantor[1]).

Es liegt auf der Hand, daß das Kontinuum $[a, b]$ stets unbegrenzt viele abzählbare Teilmengen, nämlich z. B. alle aus den zwischen a und b gelegenen rationalen Zahlen gebildeten unendlichen Mengen, enthalten muß.

Um die Natur des Kontinuums in noch helleres Licht zu stellen fügen wir den folgenden Satz von G. Cantor[2]) hinzu:

III. *Wird aus dem Kontinuum K eine willkürliche abzählbare Menge N ausgenommen, so ist diejenige aus den in K zurückbleibenden Elementen gebildete Menge K_1 mit dem Kontinuum K selbst äquivalent.*

Da $K = K_1 + N$ ist, so kann K_1 weder abzählbar noch endlich sein; denn dann müßte das Kontinuum K auch abzählbar sein. Ist nun N_1 eine solche abzählbare Menge, daß $K_1 = N_1 + K_2$ ist, so hat man $K = (N + N_1) + K_2$; nun ist aber $K_2 \sim K_2$ und $N_1 \sim N + N_1$ also ist auch $K \sim K_1$.

Beispiel. Die Menge aller zwischen 0 und 1 gelegenen irrationalen Zahlen ist mit dem Kontinuum $[0, 1]$ äquivalent.

§ 74. Das Arealkontinuum.

Man sagt, daß das Zahlenpaar (u, v) ein Arealkontinuum A durchläuft, wenn die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten u und v das Areal A in der uv-Ebene vollständig ausfüllen; die Be-

1) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 1, p. 76; 1892.

2) Journal für Mathematik, Bd. 84, p. 254; 1877.

grenzungslinien des Areals A heißen auch die Grenzen des Arealkontinuums.

Über diese Kontinuen gilt der folgende Satz von G. Cantor[1]):

I. *Ein willkürliches Arealkontinuum und ein willkürliches Liniekontinuum sind immer äquivalent.*

Dem Satze § 73, I zufolge können wir uns offenbar darauf beschränken, dasjenige Arealkontinuum zu betrachten, das wir erhalten, wenn u und v jedes für sich das Liniekontinuum $[0, 1]$ durchlaufen. Es liegt dann auf der Hand, daß die aus den dadurch gebildeten Zahlenpaaren $(u, 0)$ und $(0, v)$ gebildeten Zahlenmengen mit dem Liniekontinuum $[-2, 0]$ äquivalent sein müssen. Es bleibt uns daher nun übrig zu beweisen, daß das vom Zahlenpaare (u, v) für $0 < u \leqq 1$ und $0 < v \leqq 1$ gebildete Arealkontinuum mit dem von der Zahl x, indem $0 < x \leqq 1$ vorausgesetzt wird, gebildeten Liniekontinuum äquivalent ist.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir die drei Zahlen u, v und t in unendliche Dezimalbrüche, deren Ziffern von einem bestimmten Platze ab nicht sämtlich gleich Null sind; wir setzen

$$(1) \qquad \begin{cases} u = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \\ v = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots, \end{cases}$$

wo a_p und b_q diejenigen einzelnen Ziffern bezeichnen, die weder selbst Null sind noch einer Ziffer Null nachfolgen. Kommen aber in den Dezimalbrüchen eine oder mehrere nacheinander folgende Ziffern Null vor, so sollen diese Ziffern Null mit der nachfolgenden von Null verschiedenen Ziffer ein a_p oder b_q bilden.

Ein eindeutiges Zusammengehören des Zahlenpaares (u, v) und der Zahl x kann nun dadurch erhalten werden, daß die Zahl

$$(2) \qquad x = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots a_n b_n \cdots$$

dem Zahlenpaare (1) entspricht und umgekehrt, indem auch im letzten Falle der Dezimalbruch (2) ganz wie (1) aufzufassen ist.

Beispiel 1. Demjenigen aus $u = 0{,}234234 \cdots$, $v = 0{,}030303 \ldots$ gebildeten Zahlenpaare (u, v) entspricht die Zahl $x = 0{,}2033034032 \cdots$.

Beispiel 2. Der Zahl $x = 0{,}301301 \cdots$ entspricht das durch $u = 0{,}333 \cdots$, $v = 0{,}010101 \cdots$ bestimmte Zahlenpaar (u, v).

Diesen Beweis verdankt man J. König[2]).

---

1) Ebenda.

2) Schönflies im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, p. 23, 1900.

Unser Arealkontinuum ist also dem Liniekontinuum $[-2, 1]$ und folglich auch dem Liniekontinuum $[0, 1]$ äquivalent. Es ist demnach möglich eine ein-eindeutige Verbindung zwischen den Punkten einer geradlinigen Strecke mit der Länge 1 und den Punkten, die im Innern oder auf dem Perimeter eines Quadrates mit der Seite 1 liegen, anzugeben.

Die komplexe Zahl $x = u + iv$ bildet eine komplexe Zahlenmenge, wenn die Komponenten u und v jede für sich eine gewöhnliche Zahlenmenge bilden; diese komplexe Menge ist dann und nur dann *endlich*, wenn die beiden entsprechenden reellen Mengen diese Eigenschaft haben.

Die aus der komplexen Zahl x gebildete Menge ist dann und nur dann *abgeschlossen*, wenn die aus u und v gebildeten gewöhnlichen reellen Mengen es sind.

Die Zahl $\omega = \alpha + i\beta$ heißt eine Häufungsstelle der aus $x = u + iv$ gebildeten Menge A, wenn unendlich viel Elemente x der Menge A der Bedingung

$$| \omega - x | < \varepsilon$$

genügen, wie klein auch die positive Größe ε angenommen wird. Ganz wie in § 18 beweisen wir hier den Satz:

I. *Die Zahl $\omega = \alpha + i\beta$ ist dann und nur dann Häufungsstelle der aus $x = u + iv$ gebildeten komplexen Zahlenmenge X, wenn α oder β Häufungsstellen der aus den entsprechenden Komponenten u und v gebildeten reellen Mengen U und V sind.*

Aus § 71, II ergibt sich dann unmittelbar der ähnliche Satz:

II. *Eine unendliche abgeschlossene komplexe Zahlenmenge hat mindestens eine Häufungsstelle.*

Beispiel 1. Ist die Menge U endlich, aus den Zahlen $a_1 a_2 \cdots a_n$ bestehend, und ist b eine Häufungsstelle der Menge V, so sind die n Zahlen $a_1 + ib, a_2 + ib, \cdots a_n + ib$ sämtlich Häufungsstellen der Menge X.

Beispiel 2. Ist Null eine Häufungsstelle der Menge V, so hat die komplexe Zahlenmenge eine *reelle* Häufungsstelle.

Sind die beiden Mengen U und V abzählbar, so hat die komplexe Menge X dieselbe Eigenschaft. Durchläuft (u, v) ein Kontinuum K, so sagen wir, daß $x = u + iv$ ebenfalls K durchläuft.

146. Welches Zahlenpaar (u, v) entspricht bei der oben angegebenen Verbindung der Zahl $x = 4 : 11$, und welche Zahl dem Zahlenpaare $(\frac{1}{2}, \frac{1}{12})$?

147. Es ist zu beweisen, daß bei der oben angegebenen Verbindung die rationalen Zahlen x solchen Zahlenpaaren (u, v) entsprechen, für welche sowohl u als v rational sind.

148. Bezeichnen die einzelnen Elemente der unendlichen abzählbaren Folge

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n \cdots$$

gewöhnliche Liniekontinuen, so ist ihre Vereinigungsmenge dem Linienkontinuum $[0, 1]$ äquivalent.

149. Aus der Zahlenfolge $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$ wird ein Kontinuum mit unendlich viel Dimensionen, ganz wie das Arealkontinuum aus dem Zahlenpaare (u, v) gebildet. Es ist zu beweisen, daß dies Kontinuum dem Liniekontinuum $[0, 1]$ äquivalent ist. (G. Cantor[1]).)

Kapitel XVIII.

Funktionen.

§ 75. Der Funktionsbegriff.

1. *Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Wenn die reelle Zahl y in solcher Weise von der anderen reellen Zahl x abhängt, daß man ein, jedenfalls theoretisches, Mittel besitzt um y zu *bestimmen*, wenn x *aufgegeben* wird, so heißt y eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x; diese Abhängigkeit wird allgemein durch eine Gleichung von der Form

$$y = f(x) \tag{1}$$

ausgedrückt; y heißt hier die abhängige, x die unabhängige Variabele.

Da man imstande sein soll y zu *bestimmen*, wenn x *aufgegeben* wird, so liegt auf der Hand, daß sowohl y als x *endlich* angenommen werden müssen; wenn dies nicht der Fall ist, so müssen besondere Definitionen durch Grenzübergänge hinzugefügt werden.

Beispiel 1. Die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_p x^{n-p} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{2}$$

wo die reellen Koeffizienten a_p also sämtlich von x unabhängig sind, ist für jeden endlichen Wert von x eine Funktion dieser Größe.

1) Journal für Mathematik, Bd. 84, p. 256; 1877

Beispiel 2. Die gebrochene rationale Funktion

$$(3) \qquad y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_p x^{n-p} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_q x^{m-q} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

ist als Funktion für jeden endlichen Wert von x definiert, die nur dem Nenner den Wert Null nicht geben; wird zwar der Nenner Null, der Zähler aber nicht, so folgt das Verhalten unserer Funktion unmittelbar aus der Definition von ∞.

Beispiel 3. Die Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ sind für endliche reelle x reelle Funktionen dieser Variabelen.

Beispiel 4. Der natürliche Logarithmus $\log x$ ist für endliche positive x eine reelle Funktion von x.

Bei diesem Beispiele ist das Verhältnis so einfach, daß y für sämtliche in Betracht kommenden Werte von x nach demselben Gesetze zu bestimmen ist. So einfach ist die Sache im allgemeinen natürlich nicht; wir müssen uns vielmehr denken, daß y nach verschiedenen Gesetzen zu bilden ist für jeden einzelnen Wert von x.

Beispiel 5. $y = \omega(x)$, wo $\omega(x) = +1$ für rationale aber $\omega(x) = -1$ für irrationale Werte von x, ist eine reelle Funktion von x.

Die soeben betrachteten speziellen Funktionen sind sämtlich definiert, wenn x ein gewisses Intervall durchläuft; dies ist natürlich im allgemeinen auch nicht der Fall. In der Zahlentheorie kommen z. B. häufig Funktionen vor, die nur für *ganze* Werte der Variabeln definiert sind.

Beispiel 6. Der Möbiussche[1]) Faktor $\mu(n)$, der so definiert ist, daß $\mu(n) = 0$ ist, wenn n durch ein Quadrat größer als 1 teilbar ist, aber $\mu(n) = \pm 1$, je nachdem n ein Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl *verschiedener* Primzahlen ist.

2. *Reelle Funktionen zweier reeller Veränderlichen.* Wenn die reelle Zahl y in solcher Weise von dem Zahlenpaar (u, v) abhängt, daß man y *bestimmen* kann, wenn sowohl u als v *aufgegeben* sind, so heißt y eine reelle Funktion der zwei reellen Veränderlichen u und v oder des Zahlenpaares (u, v); man setzt in diesem Falle

$$(4) \qquad y = \varphi(u, v).$$

Ganz dieselben Bemerkungen über nicht endliche Werte gelten natürlich ungeändert hier.

Beispiel 7. Die rationalen Funktionen der beiden reellen Variabeln u und v.

1) Journal für Mathematik, Bd. 9, p. 105ff.; 1832.

3. *Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Setzt man $x = u + iv$, und bezeichnen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ reelle Funktionen des Zahlenpaares (u, v), so heißt die komplexe Zahl

$$y = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) \tag{5}$$

eine Funktion der komplexen Variabeln $x = u + iv$, und wir setzen auch hier kürzer

$$y = f(x). \tag{6}$$

Verschwindet die Funktion $\psi(u, v)$ mit v, ist also $\psi(u, 0) = 0$, so heißt y eine *reelle* Funktion der komplexen Variabelen x.

Beispiel 8. Die Funktionen e^x, $\cos x$, $\sin x$ und die rationalen Funktionen (2) und (3), wo die Koeffizienten a_p und b_q sämtlich reell sind, sind reelle Funktionen der komplexen Variabelen x.

Beispiel 9. Sind die Koeffizienten a_p und b_q nicht sämtlich reell, so sind die rationalen Funktionen (2) und (3) nicht reelle Funktionen von x.

Beispiel 10. Der allgemeine Logarithmus $\operatorname{Log} x$ ist eine nicht reelle Funktion von x.

Jede der acht ersten der oben betrachteten speziellen Funktionen hat diejenige Eigenschaft, daß nur ein einziger Funktionenwert jedem einzelnen der möglichen Werte von x entspricht. Solche Funktionen heißen *eindeutig*.

Beispiel 11. Ist $f(x)$ eine eindeutige, so ist $y = \sqrt[n]{f(x)}$ eine in x n-deutige Funktion.

Beispiel 12. Der allgemeine Logarithmus $\operatorname{Log} x$ ist eine unendlich vieldeutige Funktion von x.

---

150. Es ist diejenige durch die Summe der geometrischen Reihe
$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x + \sin^2 x \cos^6 x + \cdots$$
definierte reelle Funktion von x zu untersuchen.

151. Die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind in solcher Weise definiert, daß immer $\varphi(x) = 3x + 2$ ist, während $f(x) = 2x - 1$ für $x \leqq 1$ und $f(x) = 6 - 5x$ für $x \geqq 1$ ist; man hat x aus der Gleichung $f(x) = \varphi(x)$ zu bestimmen.

152. Die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind so definiert, daß immer $f(x) = \pm\sqrt{4x + 1}$ ist, während $\varphi(x) = 4x - 7$ für $x \leqq \frac{8}{3}$ und und $\varphi(x) = x + 1$ für $x \geqq \frac{8}{3}$ zu setzen ist; man hat x aus der Gleichung $f(x) = \varphi(x)$ zu bestimmen.

§ 76. Endliche reelle Funktionen. Satz von Weierstraß.

Die reelle Funktion $f(x)$ heißt *endlich* im Intervall $[a, b]$, wenn diejenige von sämtlichen Funktionswerten, indem x das Intervall $[a, b]$ durchläuft, gebildete Zahlenmenge eine abgeschlossene ist; obere und untere Grenze G und g dieser Zahlenmenge heißen auch obere und untere Grenze der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

Aus § 71, I erhalten wir dann unmittelbar den Satz:

I. *Ist $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$, die Endwerte mitgerechnet, endliche Funktion, so hat $f(x)$ in diesem Intervalle sowohl eine obere als eine untere Grenze G und g.*

Die Differenz $D = G - g$ heißt die *Schwankung* der Funktion $f(x)$ im Intervalle $[a, b]$.

Als ein wichtiges Supplement des Satzes I hat Weierstraß den folgenden in seinen Vorlesungen mitgeteilt:

II. *Hat die im Intervalle $[a, b]$, die Endwerte a und b mitgerechnet, endliche Funktion $f(x)$ in diesem Intervalle obere Grenze G und untere Grenze g, so existieren in $[a, b]$, die Endwerte ebenfalls mitgerechnet, mindestens ein solcher Wert x_1 von x, daß $f(x)$ im Intervall $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ die obere Grenze G hat, und mindestens ein solcher Wert x_2 von x, daß $f(x)$ im Intervalle $[x_2 - \varepsilon, x + \varepsilon]$ die untere Grenze g hat, indem ε eine willkürlich kleine positive Größe bezeichnet.*

Ist $a < b$ und bedeutet m_1 das arithmetische Mittel zwischen a und b, ist also $2m_1 = a + b$, und bezeichnen endlich G_1 und G_2 die oberen Grenzen von $f(x)$ in den Intervallen $[a, m_1]$ und $[m_1, b]$, so muß mindestens eine dieser Zahlen G_1 und G_2 gleich G sein, denn wäre sowohl $G_1 < G$ als $G_2 < G$, so könnte G nicht die obere Grenze von $f(x)$ in $[a, b]$ sein.

Es sei nun $[a_1, b_1]$ dasjenige der beiden Intervalle $[a, m_1]$ und $[m_1, b]$, in welchem $f(x)$ die obere Grenze G hat, oder ein willkürliches von ihnen, wenn sie beide diese Eigenschaft besitzen; dann führen wir wieder das arithmetische Mittel zwischen a_1 und b_1, also $2m_2 = a_1 + b_1$, ein; usw.

Die durch die so erhaltenen Annäherungsreihen

$$(1) \qquad \begin{cases} b, & b_1, & b_2, \cdots, & b_n, \cdots \\ a, & a_1, & a_2, \cdots, & a_n, \cdots \end{cases} \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

definierte Grenzzahl ist demnach eine der Zahlen x_1.

In ganz ähnlicher Weise wird die Existenz der Zahl x_2 nachgewiesen.

Wir bemerken aber ausdrücklich, daß die Zahlen G und g im allgemeinen *nicht* Funktionenwerte von $f(x)$ sind; d. h., es existiert im allgemeinen *keine* solche Zahl x, daß $a \leq x < b$ und $f(x) = G$ oder $f(x) = g$ ist.

Übrigens liegt auf der Hand, daß der Satz II noch richtig bleibt, wenn x nur eine Zahlenmenge, die überall dicht im ganzen Intervalle $[a, b]$ liegt, z. B. die rationalen Zahlen dieses Intervalles durchläuft.

Beispiel 1. Ist x rational, so hat die Funktion $\sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{8}}\right)$ im Intervalle $[-\pi\sqrt{2}, +\pi\sqrt{2}]$ obere Grenze $+1$ und untere Grenze -1, und dementsprechend hat man $x_1 = \pi\sqrt{2}, x_2 = -\pi\sqrt{2}$.

Beispiel 2. Mit denselben Bezeichnungen hat die Funktion $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{8}}\right)$ in demselben Intervalle obere Grenze $+\infty$ und untere Grenze $-\infty$.

Die reelle Funktion $\varphi(u, v)$ heißt *endlich* im Kontinuum A, wenn diejenige von sämtlichen Funktionenwerten, indem der Punkt (u, v) das Areal A durchläuft, gebildete Zahlenmenge eine abgeschlossene ist; obere und untere Grenze G und g dieser Menge heißen auch obere und untere Grenze der Funktion $\varphi(u, v)$ im Kontinuum A.

Der Satz II hat hier das folgende Analogon:

III. *Hat die im Kontinuum A, die Begrenzung mitgerechnet, endliche Funktion $\varphi(u, v)$ in diesem Kontinuum obere Grenze G und untere Grenze g, so existiert in A, die Begrenzung ebenfalls mitgerechnet, mindestens ein solches Zahlenpaar (u_1, v_1), daß $\varphi(u, v)$ für $u_1 - \varepsilon < u \leq u_1 + \varepsilon$ und $v_1 - \varepsilon \leq v \leq v_1 + \varepsilon$ die obere Grenze G hat, und mindestens ein solches Zahlenpaar (u_2, v_2), daß $\varphi(u, v)$ für $u_2 - \varepsilon \leq u \leq u_2 + \varepsilon$ und $v_2 - \varepsilon \leq v \leq v_2 + \varepsilon$ die untere Grenze g hat, indem ε eine willkürliche kleine positive Größe bedeutet.*

Hat man nämlich für jedes dem Kontinuum A angehörige Zahlenpaar (u, v) immer $a \leq u \leq b$ und $\alpha \leq v \leq \beta$, so führen wir die beiden arithmetischen Mittel m_1 zwischen a und b und μ_1 zwischen α und β ein; dadurch bestimmen wir die Zahlen a_1 und b_1, α_1 und β_1, so daß $\varphi(u, v)$ in denjenigen Teil von A, für welchen $a_1 \leq u \leq b_1$ und $\alpha_1 \leq v \leq \beta_1$ ist, die Funktion $\varphi(u, v)$ die obere Grenze G hat, usw.

Bezeichnen nun u_1 und v_1 die Grenzwerte der beiden Paare von Annäherungsreihen

(2) $\begin{cases} b, & b_1, & b_2, \cdots, & b_n, \cdots \\ a, & a_1, & a_2, \cdots, & a_n, \cdots \end{cases}$ $\qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

(3) $\begin{cases} \beta, & \beta_1, & \beta_2, \cdots, & \beta_n, \cdots \\ \alpha, & \alpha_1, & \alpha_2, \cdots, & \alpha_n, \cdots \end{cases}$ $\qquad \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta-\alpha}{2^n},$

so hat das Zahlenpaar (u_1, v_1) die gewünschte Eigenschaft.

153. Man soll im Intervalle $[1, 2]$ obere und unter Grenze die Funktion $y = 6x^2 - 17x + 12$ bestimmen.

154. Die Funktion $\Phi(x)$ ist so definiert, daß $\Phi(x) = x^2 + 2$ für $x \geqq 1$ aber $\Phi(x) = 5 - 2x^2$ für $x \leqq 1$ ist; man hat die obere und untere Grenze dieser Funktion im Intervall $[0, 2]$ zu bestimmen.

155. Hat man im Intervalle $[a - b, a + b]$, die Endwerte mitgerechnet, für die reelle Funktion $f(x)$ immer $|f(x) - f(a)| < k$, so kann die Schwankung von $f(x)$ im obengenannten Intervalle den Wert $2k$ nicht übersteigen.

§ 77. Allgemeines Konvergenzprinzip für das Kontinuum.

Bei unseren vorhergehenden Bemerkungen über den Funktionsbegriff haben wir nur solche Funktionswerte in Betracht gezogen, die aufgegebenen Werten der unabhängigen Veränderlichen entsprechen. Hier haben wir vor allem zu definieren, was darunter zu verstehen ist, daß eine reelle Funktion $f(x)$ der reellen Variabelen x einem Grenzwerte A zustrebt, wenn x entweder wachsend oder abnehmend sich kontinuierlich einer bestimmten Zahl a mehr und mehr annähert oder kontinuierlich, positive oder negative Werte durchlaufend, gegen ∞ wächst.

Wir können uns dann auf denjenigen Fall beschränken, wo x immer wachsend sich dem Zahlenwerte a mehr und mehr annähert, indem die übrigen Fälle in ganz ähnlicher Weise behandelt werden können. Zu diesem Zwecke führen wir die folgende Definition ein:

Die Funktion $f(x)$ hat einen Grenzwert A, indem x immer wachsend dem Zahlenwerte a zustrebt, wenn es möglich ist für eine vorgegebene willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε eine solche von Null verschiedene positive Zahl δ zu bestimmen, daß für $a - \delta \leq x < a$ immer

(1) $$|A - f(x)| < \varepsilon$$

ist; A wird dann der Kürze halber durch $f(a - 0)$ bezeichnet.

Von dieser Definition ausgehend beweisen wir nun den folgenden

fundamentalen, dem allgemeinen Konvergenzprinzip für Zahlenfolgen ähnlichen Satz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $f(a-0)$, also dafür, daß $f(x)$ einen Grenzwert A hat, wenn x wachsend dem Zahlenwerte a zustrebt, besteht darin, daß es möglich ist für eine vorgegebene willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε eine solche positive von Null verschiedene Größe δ zu bestimmen, daß, wenn x und y beide dem Intervall $[a-\delta, a]$ anhören, immer*

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{2}$$

ist.

Daß diese Bedingung notwendig ist, liegt auf der Hand; denn aus der Identität

$$f(x)-f(y)=A-f(y)-(A-f(x))$$

erhält man wegen (1), wenn der Grenzwert A existieren soll

$$|f(x)-f(y)|\leqq|A-f(y)|+|A-f(x)|<2\varepsilon;$$

daß aber (2) auch hinreichend ist, beweisen wir folgendermaßen:

Es seien $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3>\cdots>\varepsilon_n>\cdots$ eine willkürliche Reihe positiver Zahlen, so daß diese Zahlenfolge den Grenzwert 0 hat, dementsprechend bestimmen wir die anderen positiven Zahlen $\delta_1>\delta_2>\delta_3>\cdots>\delta_n>\cdots$, so daß immer $|f(x)-f(y)|<\varepsilon_n$ ist, wenn x und y beide dem Intervall $[a-\delta_n, a]$, den Endwert $a-\delta_n$ mitgerechnet, anhören. Da nun die Zahlen $a-\delta_n$, $a-\delta_{n+1}$, $a-\delta_{n+2}$, $\cdots$ sämtlich dem Intervalle $[a-\delta_n, a]$ anhören, so ist die Zahlenfolge

$$f(a-\delta_1),\ f(a-\delta_2),\ f(a-\delta_3),\ \cdots, \tag{3}$$

dem allgemeinen Konvergenzprinzip für Zahlenfolgen zufolge, eine Fundamentalreihe. Bezeichnet A den Grenzwert der Fundamentalreihe (3), so haben wir noch zu beweisen, daß $f(a-0)$ existiert, und daß $A=f(a-0)$ ist.

Wird eine willkürlich kleine positive Größe ε aufgegeben, bestimmen wir ein solches ε_n, daß $2\varepsilon_n<\varepsilon$ ist; für alle x, die dem entsprechenden Intervalle $[a-\delta_n, a]$ angehören, haben wir daher

$$A-f(x)|\leqq|A-f(a-\delta_n)|+|f(a-\delta_n)-f(x)|<2\varepsilon_n<\varepsilon,$$

woraus die Gleichheit $A=f(a-0)$ unmittelbar folgt.

Durch den folgenden Satz II zeigen wir nunmehr den Zusammenhang zwischen dem kontinuierlichen Grenzübergange und dem durch eine Fundamentalreihe erhaltenen Grenzübergange:

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ einen Grenzwert $f(a-0)$ hat, besteht darin, daß für jede monotone Fundamentalreihe*

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots \tag{4}$$

mit dem Grenzwerte a die entsprechende Zahlenfolge

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots \tag{5}$$

selbst eine Fundamentalreihe ist.

Daß diese Bedingung notwendig ist, folgt unmittelbar aus der Definition des Grenzwertes $f(a-0)$; ist nämlich ε eine willkürlich kleine vorgegebene positive Größe, und bestimmt man das Intervall $[a-\delta, a]$, so daß, wenn x diesem Intervalle anhört, immer

$$|\, f(a-0) - f(x)\,| < \varepsilon$$

ist, während x_N die erste Zahl der Folge (4) bezeichnet, die im Intervalle $[a-\delta, a]$ liegt, so hat man für $n \geqq N$ immer

$$|\, f(a-0) - f(x_n)\,| < \varepsilon,$$

woraus unmittelbar folgt, daß die Zahlenfolge (5) eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte $f(a-0)$ sein muß.

Es sei nun

$$y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < \cdots \tag{6}$$

eine andere monotone Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a, so daß die Zahlenfolge

$$f(y_0),\ f(y_1),\ f(y_2),\ \cdots,\ f(y_n),\ \cdots \tag{7}$$

auch eine Fundamenta lreihe ist, dann beweisen wir, daß diese beiden Fundamentalreihen (5) und (7) denselben Grenzwert haben müssen.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so bilden wir die *monotone* Zahlenfolge

$$x_{m_0},\ y_{n_0},\ x_{m_1},\ y_{n_1},\ x_{m_2},\ y_{n_2},\ \cdots \tag{8}$$

deren Elemente abwechselnd aus (4) und (6) gewählt sind; dies ist offenbar in unzähliger Weise möglich; die Zahlenfolge (8) ist somit auch eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a, während die entsprechende Zahlenfolge

$$f(x_{m_0}),\ f(y_{n_0}),\ f(x_{m_1}),\ f(y_{n_1}),\ \cdots \tag{9}$$

keine Fundamentalreihe sein kann; dies ist aber mit unserer im Satze II ausgesprochenen Voraussetzung in Widerspruch.

Sämtliche Fundamentalreihen (5) müssen daher denselben Grenzwert A haben; es bleibt daher nur noch übrig zu beweisen, daß $f(a-0)$ existiert, und daß außerdem $f(a-0)=A$ sein muß.

Dies folgt nicht unmittelbar daraus, daß sämtliche Zahlenfolgen (5) Fundamentalreihen mit demselben Grenzwerte sind; denn es könnte ja möglich sein, daß diejenigen Zahlen δ, die für ein vorgegebenes ε für die verschiedenen Zahlenfolgen (5) bewirken, daß $|A-f(x_n)|<\varepsilon$ wird, wenn x_n dem Intervalle $[a-\delta, a]$ angehört, die untere Grenze 0 haben, was ja unserer Definition des Grenzwertes $f(a-0)$ zufolge nicht zulässig ist.

Die Gleichheit $A=f(a-0)$ kann indessen antithetisch folgendermaßen bewiesen werden: Wäre $A+f(a-0)$, so existiert eine solche Zahl ε, daß in jedem Intervalle $[a-\delta, a]$, wie klein die positive Größe δ auch angenommen wird, solche Werte von x aufgefunden werden können, daß für sie $|f(x)-A|\geqq\varepsilon$ ist. In dieser Weise bestimmen wir sukzessive eine monotone Fundamentalreihe

$$z_0<z_1<z_2<z_3<\cdots<z_n<\cdots \tag{10}$$

mit dem Grenzwerte a, so daß für jedes n immer

$$|f(z_n)-A|\geqq\varepsilon$$

sein muß.

Hieraus folgt aber, daß die der Fundamentalreihe (10) entsprechende Zahlenfolge

$$f(z_0),\ f(z_1),\ f(z_2),\ \cdots,\ f(z_n),\ \cdots$$

nicht eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte A sein kann; dies ist aber mit unserer Voraussetzung im Widerspruch, und demnach hat man

$$A=f(a-0).$$

Der Satz II, der uns späterhin sehr nützlich sein wird, gestattet uns also, wenn wir zu untersuchen haben, ob $f(a-0)$ existiert, anstatt der kontinuierlichen Variation von x diejenige Zahlenfolge (5), die einer *ganz willkürlichen* monotonen Fundamentalreihe (4) mit dem Grenzwerte a entspricht, zu untersuchen. Durch dies Verfahren kann man bisweilen auch diesen Grenzwert finden, wenn er existiert.

Der Satz II gestattet uns noch ohne weiteres sämtliche für Fundamentalreihen bewiesene Sätze auf die Funktion $f(x)$ überzuführen, wenn x kontinuierlich dem Zahlenwerte a zustrebt. Die in § 9, II gegebenen Sätze über Rechnenoperationen mit Fundamental-

reihen sind z. B. wortgetreu zum Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen zu benutzen, vorausgesetzt, daß diese Grenzwerte existieren.

Als weitere Anwendung beweisen wir noch den Satz:

III. *Wenn $f(x)$ für $y < z < a$ der Bedingung $f(y) \leq f(z)$ genügt, und wenn außerdem $f(x)$ stets endlich bleibt, wenn x dem Intervalle $[a - d, a]$ angehört, wo d eine von Null verschiedene positive Größe bedeutet, so existiert $f(a - 0)$ immer.*

Bildet man nämlich eine willkürliche monotone Zahlenfolge (4), und gehören ihre Elemente x_n für $n \geq N$, sämtlich dem Intervall $[a - d, a]$ an, so wird die entsprechende Zahlenfolge (5) monoton wachsend und ist demnach eine Fundamentalreihe, weil die absoluten Beträge ihrer Elemente stets endlich bleiben.

Wenn $f(x)$ einen bestimmten Grenzwert hat, indem x abnehmend dem Zahlenwerte a kontinuierlich zustrebt, so wird dieser Grenzwert als $f(a + 0)$ bezeichnet.

Hat man $f(a + 0) \neq f(a - 0)$, so heißt die Differenz $f(a + 0) - f(a - 0)$ der *Sprung* der Funktion $f(x)$ für $x = a$, und $x = a$ heißt eine *Sprungstelle* der Funktion $f(x)$. Hier wird natürlich ausdrücklich vorausgesetzt, daß $f(a \pm 0)$ beide endlich und bestimmt sind.

Die obenstehende Entwicklung rührt von H. Bohr her; schon P. du Bois Reymond[1]) hat dem Prinzipe nach Untersuchungen dieser Art angegeben.

§ 78. Anwendungen auf komplexe Variabeln.

Die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen sind beinahe wortgetreu auf die Funktion

$$f(x) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) \tag{1}$$

der komplexen Veränderlichen $x = u + iv$ überzuführen; zu diesem Zwecke haben wir die folgende Definition anzuwenden:

Die Funktion $f(x)$ hat einen Grenzwert A, wenn die komplexe Zahl x, gewissen Bedingungen genügend, dem Zahlenwerte a zustrebt, wenn es möglich ist für eine vorgegebene, willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε eine solche von Null verschiedene positive Zahl δ zu bestimmen, daß für $|x - a| < \delta$ immer

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{2}$$

wird.

1) Allgemeine Funktionentheorie, p. 260; Tübingen 1882.

Was die obengenannten Bedingungen, denen x genügen soll, betrifft, so können sie z. B. darin bestehen, daß diese komplexe Zahl x eine gewisse durch a gehende Kurve durchlaufen soll, oder sich nur in einem gewissen Winkel mit dem Scheitel a bewegen soll.

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ einen Grenzwert hat, wenn x, gewissen Bedingungen genügend, dem Zahlenwerte a zustrebt, besteht darin, daß es für eine vorgegebene willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε möglich ist, eine solche von Null verschiedene positive Zahl δ zu bestimmen, daß für $|a-x|<\delta$, $|a-y|<\delta$ immer*

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{3}$$

wird, indem natürlich sowohl x als y den obengenannten Bedingungen genügen.

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ einen Grenzwert hat, ist, wenn x, gewissen Bedingungen genügend, dem Zahlenwerte a zustrebt, daß für jede beliebige Fundamentalreihe*

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{4}$$

die den Grenzwert a hat, und deren Elemente sämtlich den obengenannten Bedingungen genügen, die entsprechende Zahlenfolge

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{5}$$

selbst eine Fundamentalreihe ist.

Es liegt dann auf der Hand, wie man die reelle Funktion der zwei reellen Veränderlichen u und v zu behandeln hat, wenn das Zahlenpaar (u, v) dem festen Zahlenpaare (a, b) zustrebt.

Beispiel 1. Um die Funktion $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ zu untersuchen, setzen wir $x=u+iv$ und erhalten somit

$$x=\frac{u-iv}{u^2+v^2},$$

woraus folgt:

$$f(x)=e^{\frac{u}{u^2+v^2}}\left(\cos\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)-i\sin\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)\right). \tag{6}$$

Läßt man nun x gegen die Null konvergieren, so daß diese Zahl der Achse der positiven Zahlen folgt, so hat man $v=0$, $u>0$ somit ergibt sich wegen § 20, (19)

$$f(u)>\frac{u^{-n}}{n!}; \tag{7}$$

unsere Funktion wird demnach stärker unendlich als eine willkürliche Potenz von $1:u$.

Folgt x andererseits der Achse der negativen Zahlen, ist also $v = 0$, $u < 0$, so hat man

$$f(-u) < n!\, u^n, \tag{8}$$

so daß unsere Funktion rascher dem Grenzwerte Null zustrebt als irgendwelche Potenz von u.

Folgt x der Achse der rein imaginären Zahlen, ist also $u = 0$, so hat man immer $|f(x)| = 1$, während die Phase unserer Funktion unendlich groß wird; die beiden Komponenten von $f(x)$ sind demnach in diesem Falle unbestimmt.

Durchläuft x die gerade Linie mit der Gleichung $v = \alpha u$, so erhält man wegen (6)

$$f(x) = e^{\frac{1}{u(1+\alpha^2)}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{u(1+\alpha^2)}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{u(1+\alpha^2)}\right)\right); \tag{9}$$

ist nun u positiv, bewegt sich also x im ersten oder vierten Quadranten, so wächst $|f(x)|$ über jede Grenze hinaus, während dieser absolute Betrag der Null zustrebt, wenn u negativ angenommen wird, also wenn x sich im zweiten oder dritten Quadranten bewegt.

Folgt x dem Kreise mit der Gleichung

$$u^2 + v^2 - 2au = 0,$$

so erhält man wegen (6)

$$f(x) = e^{\frac{1}{2a}} \cdot \left(\cos\frac{v}{2au} - i \sin\frac{v}{2au}\right); \tag{10}$$

hier ist demnach der absolute Betrag $|f(x)$ konstant, während die Phase unserer Funktion für $u = 0$ unendlich groß wird.

Durchläuft x endlich die Parabel $v^2 = pu$, so hat man

$$f(x) = e^{\frac{1}{p+u}} \left(\cos\frac{\sqrt{p}}{(p+u)\sqrt{u}} - i \sin\frac{\sqrt{p}}{(p+u)\sqrt{u}}\right); \tag{11}$$

hier hat $|f(x)|$ daher den Grenzwert $e^{\frac{1}{p}}$, während die Phase von $f(x)$ unendlich groß ist.

Beispiel 2. Um die rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^p + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{p-1} x + b_p}$$

für $|x| = \infty$ zu untersuchen, bezeichnen wir durch

$$x_0\, x_1\, x_2, \ldots, x_r, \ldots \tag{12}$$

eine willkürliche divergente Zahlenfolge und erhalten somit für jedes r

$$\frac{f(x_r)}{g(x_r)} = x_r^{n-p} \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{1}{x_r}\right) + \cdots + a_r \left(\frac{1}{x_r}\right)^n}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{x_r}\right) + \cdots + b_p \left(\frac{1}{x_r}\right)^p},$$

woraus für $n = p$ der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0} \tag{13}$$

folgt, während man allgemeiner erhält

$$\lim_{x=\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \begin{cases} 0 \\ \infty, \end{cases} \tag{14}$$

je nachdem $n \lesseqgtr p$ vorausgesetzt wird.

Beispiel 3. Setzt man $f(x) = (x-a)^p \varphi(x)$, $g(x) = (x-a)^p \psi(x)$, wo die beiden Funktionenwerte $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ endlich und bestimmt sind, und wo außerdem $\psi(a) \neq 0$ ist, so hat man

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}. \tag{15}$$

Bezeichnet in der Tat

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots$$

eine willkürliche Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte a, so hat man für jedes r

$$\frac{f(x_r)}{g(x_r)} = \frac{\varphi(x_r)}{\psi(x_r)}.$$

156. Es sind die Funktionen $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ ganz wie $e^{\frac{1}{x}}$ in § 78, Beispiel 1 zu untersuchen.

§ 79. Stetige Funktionen. Satz von G. Cantor.

Die reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x heißt *stetig* für $x = a$, wenn $f(a+0) = f(a-0)$ endlich und bestimmt ist; in ähnlicher Weise heißt die Funktion $f(x)$ der komplexen Veränderlichen x *stetig* für $x = a$, wenn $f(x)$ demselben endlichen und bestimmten Grenzwerte $f(a)$ zustrebt, in welcher Weise man auch x gegen a konvergieren läßt.

Aus den Sätzen § 77, II und § 78, II ergibt sich daher auch die folgende Definition:

Die Funktion $f(x)$ der reellen oder komplexen Veränderlichen x

heißt stetig für $x = a$, wenn es für eine vorgegebene willkürlich kleine aber von Null verschiedene Größe ε, möglich ist eine solche positive von Null verschiedene Zahl σ zu bestimmen, daß für $|h| \leqq \sigma$ immer

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \tag{1}$$

ist.

In ganz ähnlicher Weise heißt die reelle Funktion $\varphi(u, v)$ der zwei reellen Veränderlichen u und v stetig für das Zahlenpaar (a, b), wenn mit denselben Bezeichnungen wie vorher immer

$$|\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b)| < \varepsilon \tag{2}$$

ist, wenn sowohl $|h| \leqq \sigma$ als $|k| \leqq \sigma$ angenommen wird.

Wenden wir die gewöhnliche geometrische Darstellung an, so ist die Ungleichung (1) befriedigt für sämtliche Zahlen $a + h$, die im Innern oder auf der Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkte a und dem Radius σ liegen, während (2) für sämtliche Zahlenpaare $(a + h, b + k)$, die im Innern oder auf dem Parimeter eines Quadrats mit dem Mittelpunkte (a, b) und den Seiten 2σ parallel mit den Koordinatenachsen abgebildet werden, richtig ist.

Beispiel 1. Die Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ sind für jeden beliebigen endlichen Wert von x stetig.

Beispiel 2. Die Funktion $\cot x$ ist für jeden beliebigen endlichen Wert von x, der nicht von der Form $p\pi$ ist, stetig.

Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar der folgende Lehrsatz:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion*

$$f(x) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) \tag{3}$$

der komplexen Veränderlichen $x = u + iv$ für den Wert $x = a + ib$ stetig ist, besteht darin, daß die reellen Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ beide für das Zahlenpaar (a, b) stetig sind.

Setzt man in der Tat $h = \alpha + i\beta$, $x = a + ib$, so hat man wegen (3)

$$\begin{cases} f(x+h) - f(x) = \varphi(a+\alpha, b+\beta) - \varphi(a, b) \\ \qquad + i(\psi(a+\alpha, b+\beta) - \psi(a, b)); \end{cases} \tag{4}$$

es seien nun $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ für das Zahlenpaar (a, b) stetig; dann hat man für

$$|\alpha| \leqq \sigma, \qquad |\beta| \leqq \sigma \tag{5}$$

immer

$$|\varphi(a+\alpha, b+\beta) - \varphi(a, b)| < \varepsilon, \; |\psi(a+\alpha, b+\beta) - \psi(a, b)| < \varepsilon, \tag{6}$$

woraus wegen (4) und (5) folgt:

$$|f(x+h)-f(x)|<2\varepsilon$$

für $|h|<\sigma$; unsere Bedingung ist demnach *hinreichend*; hat man aber umgekehrt für $h|<\sigma$ immer $|f(x+h)-f(x)<\varepsilon$, so folgen die Ungleichungen (5) und (6) unmittelbar, so daß unsere Bedingung auch *notwendig* sein muß.

Die Funktion $f(x)$ heißt stetig im Kontinuum A, wenn sie diese Eigenschaft besitzt, indem die Variabele x das Kontinuum A durchläuft. Entspricht x einem Punkte der Begrenzung von A, so muß in der Ungleichung

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon, \quad h|\leqq\sigma \tag{7}$$

h so bestimmt werden, daß die Zahl $x+h$ dem Kontinuum A oder seiner Begrenzung angehört.

Durchläuft nun x das Kontinuum A, so hängt die Zahl σ im allgemeinen sowohl von ε als von dem betrachteten Werte von x ab; über dieses Verhältnis hat man den folgenden Satz von G. Cantor[1]):

II. *Ist $f(x)$ stetig, wenn x das Kontinuum A und seine Begrenzung durchläuft, so existiert für jede vorgegebene von Null verschiedene positive Zahl ε eine solche von Null verschiedene positive Zahl σ, daß die Ungleichung (7) für jeden dem Kontinuum A oder seiner Begrenzung angehörigen Wert von x richtig ist, wenn nur $h\leqq\sigma$ angenommen wird.*

Dem Satze I zufolge können wir uns auf reelle Funktionen einer oder zweier reellen Veränderlichen beschränken; der Kürze halber beschränken wir uns daher auf denjenigen Fall, wo die reelle Funktion $f(x)$ stetig bleibt, wenn die reelle Variable x das endliche Intervall $[a,b]$, die Endwerte a und b mitgerechnet, durchläuft.

Es sei dann $\sigma(x,\varepsilon)$ obere Grenze für diejenigen Zahlen σ, die so beschaffen sind, daß $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$ wird, wenn $|h|\leqq\sigma$ und $a\leqq x<b$ angenommen werden; dann hat man also, für diesen bestimmten Wert von x, $0<\sigma<\sigma(x,\varepsilon)$. Diese obere Grenze $\sigma(x,\varepsilon)$, die immer existieren muß, weil kein σ größer als das ganze Intervall $b-a$ sein kann, ist eine Funktion von x, wenn diese Variable das Intervall $[a,b]$ durchläuft. Bezeichnet nun l die untere Grenze dieser Funktion, so ist l eine endliche und nicht negative Zahl, und es existiert dem Satze § 76, III zufolge ein solcher Wert x, von x im Intervall $[a,b]$, daß $\sigma(x,\varepsilon)$ für diejenigen Werte von x, welche

1) Der Satz ist von Heine, nicht von Cantor selbst publiziert worden.

dem Intervalle $[x_1 - \tau, x_1 + \tau]$ in dem τ eine willkürlich kleine positive Größe bezeichnet, angehören, wirklich die untere Grenze l hat.

Da $f(x)$ auch für $x = x_1$ stetig ist, so existiert eine von Null verschiedene positive Zahl σ_1, so daß für $-\sigma_1 \leqq h \leqq +\sigma_1$ immer

$$|f(x_1 + h) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

sein muß. Im Intervalle $[x_1 - \sigma_1, x_1 + \sigma_1]$ oder in demjenigen Teile dieses Intervalles, welcher dem aufgegebenen Intervalle $[a, b]$ angehört, kann die Schwankung von $f(x)$ niemals die Größe von ε erreichen; ist nämlich auch $-\sigma_1 \leqq h_1 \leqq \sigma_1$, so hat man

$$f(x_1 + h) - f(x_1 + h_1) = (f(x_1 + h) - f(x_1)) - (f(x_1 + h_1) - f(x_1)); \tag{9}$$

da man nun in (8) h durch h_1 ersetzen darf, so ergibt sich wegen (9)

$$|f(x_1 + h) - f(x_1 + h_1)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Für sämtliche Werte von x, die den beiden Intervallen $[a, b]$ und $[x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1, x_1 + \frac{1}{2}\sigma_1]$ angehören, hat man demnach immer

$$|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon, \quad -\tfrac{1}{2}\sigma_1 \leqq h \leqq +\tfrac{1}{2}\sigma_1; \tag{11}$$

denn unter diesen Voraussetzungen über x und h liegen sowohl x als $x + h$ im Intervalle $[x_1 - \sigma_1, x_1 + \sigma_1]$; für alle diese Werte von x hat man daher $\sigma(x, \varepsilon) \geqq \frac{1}{2}\sigma_1$, und da die untere Grenze l für $\sigma(x, \varepsilon)$ diesem Werte x entspricht, so hat man ebenfalls $l \geqq \frac{1}{2}\sigma_1$.

Die Ungleichung $f(x + h) - f(x) < \varepsilon$ ist demnach für sämtliche x, die den Bedingungen $a < x \leqq b$ genügen, richtig, wenn nur $|h| \leqq l$ angenommen wird, wo also l von Null verschieden ist, wenn dies mit ε selbst der Fall ist, und damit ist unser Satz bewiesen.

Man sagt auch häufig, daß $f(x)$ in A und auf seiner Begrenzung *gleichmäßig stetig* ist. Es ist aber wohl zu beachten, daß die Stetigkeit im Innern von A nicht gleichmäßig zu sein braucht, wenn $f(x)$ nicht auch auf der Begrenzung von A stetig ist.

Beispiel 3. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist für $0 < x \leqq 1$ stetig; man hat in der Tat

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x + h)},$$

woraus $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$ folgt, wenn $|h| < x \cdot |x + h| \cdot \varepsilon$ angenommen wird; da nun das positive x willkürlich klein angenommen werden darf, so liegt auf der Hand, daß diese Stetigkeit nicht gleichmäßig sein kann.

157. Man hat für reelle x die beiden reellen Funktionen $\operatorname{tg}(\sin x)$ und $(\cos x)^{-\frac{1}{2}}$ zu untersuchen.

158. Es ist die reelle Funktion $(-1+3x-2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ für reelle x zu untersuchen.

§ 80. Sätze über stetige Funktionen.

Über stetige Funktionen haben wir die folgenden Sätze zu beweisen:

I. *Bezeichnen $y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$ Funktionen von x, die sämtlich stetig sind, wenn x das Kontinuum K durchläuft, so ist eine willkürliche rationale Funktion dieser n Größen auch eine in x stetige Funktion, wenn x das Kontinuum K durchläuft, vorausgesetzt, daß die untere Grenze des absoluten Betrages des eventuellen Nenners nicht für diese Werte von x gleich Null ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, haben wir offenbar nur die folgenden drei speziellen Funktionen zu untersuchen:

1. $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, wo α und β endliche Konstanten bezeichnen; es ist daher

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \alpha(f(x+h) - f(x)) + \beta(g(x+h) - g(x));$$

es sei nun $|f(x+h) - f(x)| < \tau$, $|g(x+h) - g(x)| < \tau$ für $|h| \leq \sigma$; dann hat man

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < (|\alpha| + |\beta|)\tau < \varepsilon, \qquad \tau < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|};$$

ist nun hier ε gegeben, so kann man τ und demnach auch σ bestimmen, so daß für $|h| \leq \sigma$ immer $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \varepsilon$ wird.

2. $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$. Aus der Indentität

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) - \varphi(x) &= (f(x+h) - f(x))(g(x+h) - g(x)) \\ &\quad + f(x)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))\end{aligned}$$

ergibt sich mit denselben Bezeichnungen wie vorher, indem $\tau < 1$ ist,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \tau^2 + \tau \cdot |g(x)| + \tau \cdot |f(x)| < (2A+1)\tau,$$

wo A die größte der oberen Grenzen für $|f(x)|$ und $|g(x)|$ bezeichnet, indem A das gegebene Kontinuum K durchläuft; es ist daher

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \varepsilon, \qquad \tau < \frac{\varepsilon}{2A+1}.$$

Hier ist τ von 0 verschieden, wenn dies mit ε der Fall ist; denn A ist immer endlich; wird ε aufgegeben, kann man somit τ und dann auch σ bestimmen.

Durch Kombination von 1. und 2. ergibt sich, daß jede ganze rationale Funktion der n Größen $y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$ eine im Kontinuum K stetige Funktion von x sein muß.

3. $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$; bezeichnet B die untere Grenze von $|f(x)|$, indem x das Kontinuum K durchläuft, so hat man

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = -\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x) f(x+h)},$$

und demnach ergibt sich mit denselben Bezeichnungen wie vorher

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \frac{\tau}{f(x) \cdot |f(x+h)} \leqq \frac{\tau}{B^2} < \varepsilon, \qquad \tau < \varepsilon \cdot B^2.$$

Da nun B nicht Null ist, so kann man, wenn ε aufgegeben wird, τ und demnach auch σ bestimmen.

Damit ist unser Satz I vollkommen bewiesen.

Beispiel 1. Da $f(x) = x$ eine für alle endliche x stetige Funktion sein muß, so hat jede beliebige ganze rationale Funktion von x dieselbe Eigenschaft, während eine gebrochene rationale Funktion in x für alle endliche x, für welche die untere Grenze des absoluten Betrages des Nenners nicht gleich Null ist, stetig bleibt.

II. *Ist $y = f(x)$ stetig für $x = a$ und $z = \varphi(y)$ stetig für $y = b = f(a)$, so ist $z = F(x) = \varphi(f(x))$ stetig für $x = a$.*

Setzt man in der Tat $y + k = f(a + h)$, $z + l = \varphi(b + k)$, so ist auch $z + l = F(a + h)$; da nun φ stetig ist, so hat man für $|k| \leqq \sigma$ immer $|l| < \varepsilon$; da aber auch f stetig ist, so kann man τ so bestimmen, daß für $|h| \leqq \tau$ immer $|k| < \sigma$ wird. Es ist demnach für $|h| \leqq \tau$ immer $|l| < \varepsilon$.

Über reelle Funktionen gelten die Sätze:

III. *Ist die reelle Funktion $f(x)$ stetig ohne konstant zu sein, wenn x das Intervall $[a, b]$, die Endwerte a und b mitgerechnet, durchläuft, so hat $f(x)$ in diesem Intervalle immer sowohl einen Maximal- als einen Minimalwert; es existiert also mindestens eine solche Zahl x, in diesem Intervalle, daß*

$$f(x_1) - f(x) \geqq 0, \qquad a < x \leqq b$$

und zugleich mindestens eine solche Zahl x_2 in $[a, b]$, daß

$$f(x_2) - f(x) \leqq 0, \qquad a \leqq x < b.$$

Dem Weierstraßschen Satze § 76, III zufolge existiert

mindestens eine Zahl x_1 in $[a, b]$, so daß $f(x)$ im Intervalle $[x_1 - \tau, x_1 + \tau]$, wie klein die positive Zahl τ auch angenommen wird, die obere Grenze G hat, indem G die obere Grenze von $f(x)$ im ganzen Intervalle $[a, b]$ bezeichnet. In jedem dieser willkürlich kleinen Intervalle $[x_1 - \tau, x_1 + \tau]$ existiert demnach mindestens eine Zahl x, so daß $G - f(x) < \varepsilon$ ist, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen wird; es ist daher $f(x_1) = G$; denn sonst könnte die Funktion $f(x)$ für $x = x_1$ nicht stetig sein.

Der Satz III ist von Weierstraß in seinen Vorlesungen mitgeteilt worden. In ganz ähnlicher Weis findet man den analogen Satz:

IV. *Ist die reelle Funktion $\varphi(u, v)$ stetig ohne konstant zu sein, wenn das Zahlenpaar (u, v) das Arealkontinuum A, seine Begrenzung mitgerechnet, durchläuft, so hat $\varphi(u, v)$ in diesem Kontinuum sowohl einen Maximal- als einen Minimalwert.*

159. Ist die reelle Funktion $f(x)$ im Intervalle $[a, b]$ stetig, und sind die Funktionenwerte $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ verschieden, wo α und β dem Intervalle $[a, b]$ anhören, so enthält das Intervall $[\alpha, \beta]$ mindestens einen solchen Zahlenwert γ, daß $f(\gamma) = A$ wird, indem A einen willkürlichen zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ gelegenen Zahlenwert bezeichnet.

160. Welchen Satz erhält man durch Kombination der vorhergehenden Aufgabe mit dem Weierstraßschen Satze § 80, III?

161. Bezeichnet A ein willkürliches endliches Kontinuum, welches den Wert $x = 0$ nicht umschließt, so ist ein willkürlicher Wert von Log x eine in A stetige Funktion von x.

162. Man hat die Stetigkeit der willkürlichen Potenz x^ω zu untersuchen.

Kapitel XIX.

Gleichmäßige Konvergenz.

§ 81. Gleichmäßig konvergente Fundamentalreihen.

Wir setzen über die Zahlenfolge

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots, \tag{1}$$

deren Elemente Funktionen von x sind, voraus, daß sie stets konvergiert, wenn x das Kontinuum K durchläuft; der Grenzwert dieser Fundamentalreihe wird durch $F(x)$ bezeichnet. Wenn es dann möglich ist, für eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe ε eine

solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

wird, welchen Wert von x im Kontinuum K man auch anwendet, so sagt man, daß die Fundamentalreihe (1) im Kontinuum K *gleichmäßig* zu seinem Grenzwerte $F(x)$ konvergiert.

Bei der gleichmäßigen Konvergenz hängt also die positive ganze Zahl N *allein* von ε, *nicht* aber von x ab.

Es sei nun p eine willkürliche positive ganze Zahl, dann hat man wegen (2) auch für $n \geqq N$ immer

$$|F(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon;$$

aus der Identität

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = F(x) - f_n(x) - (F(x) - f_{n+p}(x))$$

ergibt sich dann

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon, \quad n \geqq N, \tag{3}$$

während p jede beliebige positive ganze Zahl bezeichnen kann.

Beispiel 1. Setzt man für jedes n

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

so hat die entsprechende Zahlenfolge (1) den Grenzwert e^x und ist gleichmäßig konvergent in einem willkürlichen endlichen Kontinuum.

Beispiel 2. Ist für jedes n

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

so hat die entsprechende Zahlenfolge (1) den Grenzwert 1 und ist gleichmäßig konvergent, wenn x ein willkürliches Kontinuum durchläuft, wenn dies Kontinuum so beschaffen ist, daß in ihm $|x|$ nicht die untere Grenze 0 haben kann. Ist dies der Fall, so ist unsere Zahlenfolge *nicht* gleichmäßig konvergent.

Über gleichmäßig konvergente Fundamentalreihen gilt der wichtige Satz:

I. *Sind die Elemente $f_n(x)$ der Fundamentalreihe* (1) *für jedes n in x stetige Funktionen, wenn x das Kontinuum K durchläuft, und ist die Zahlenfolge* (1) *in K gleichmäßig konvergent, so ist ihr Grenzwert $F(x)$ auch eine in K stetige Funktion von x.*

Gehören x und $x + h$ beide dem Kontinuum K an, und bedeutet ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$|F(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |F(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

werden; bestimmt man demnach σ so, daß für $|h| \leqq \sigma$ immer

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, so erhält man aus der Identität

$$F(x+h) - F(x) = (F(x+h) - f_n(x+h)) + \\ + (f_n(x+h) - f_n(x)) - (F(x) - f_n(x)),$$

die für $|h| \leqq \sigma$ gültige Ungleichung

$$F(x+h) - F(x) | < \varepsilon.$$

In diesem Zusammenhang betrachten wir die Funktion $f(x, \alpha)$, über welche wir voraussetzen, daß

$$f(a, \alpha) = \lim_{x=a} f(x, \alpha)$$

endlich und bestimmt ist, wenn α ein gewisses Kontinuum K durchläuft; die positive Zahl σ, die so beschaffen ist, daß für $|x - a| \leqq \sigma$ immer, für ein bestimmtes α,

$$|f(a, \alpha) - f(x, \alpha)| < \varepsilon \tag{4}$$

wird, hängt im allgemeinen außer von ε auch von α ab. Ist aber die Ungleichung (4) für dasselbe σ richtig, welchen Wert von x man in K auch wählt, so sagt man, daß $f(x, \alpha)$ *gleichmäßig* gegen seinen Grenzwert $f(a, \alpha)$ konvergiert, wenn α das Kontinuum K durchläuft.

Beispiel 3. Sind x und α positiv, und ist g die untere Grenze von α, so konvergiert die Funktion

$$\frac{\alpha}{x} \cdot e^{-\frac{\alpha}{x}}$$

gleichmäßig gegen die Null mit x, wenn nur $g > 0$ angenommen wird.

Man hat in der Tat, weil α und x positiv sind,

$$e^{\frac{\alpha}{x}} > \frac{2\alpha^2}{x^2}; \quad \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-\frac{\alpha}{x}} < \frac{x}{2\alpha} < \varepsilon,$$

wenn $x \leqq 2\alpha\varepsilon$ angenommen wird, und also um so mehr, wenn $x < 2g\varepsilon$ ist, woraus die gleichmäßige Konvergenz für $g > 0$ deutlich hervorgeht.

Ist aber $g = 0$, so ist die obengenannte Konvergenz nicht mehr gleichmäßig.

---

163. Man soll die Zahlenfolge $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$, wo allgemein

$$f_n(x) = x + \frac{x^n}{n}, \quad f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}$$

zu setzen ist, je nachdem x rational oder irrational ist, für reelle x untersuchen.

164. Sind die y_n sämtlich Funktionen von x, so daß die Fundamentalreihe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$$

in einem Kontinuum K gleichmäßig konvergiert, und ist $F(x)$ in K stetig, so ist die Zahlenfolge

$$F(y_0),\ F(y_1),\ F(y_2),\ \cdots,\ F(y_n),\ \cdots$$

eine im Kontinuum K gleichmäßig konvergente Fundamentalreihe.

165. Sind die $y_{r,s}$ sämtlich Funktionen von x, so daß die p Fundamentalreihen

$$y_{r,0},\ y_{r,1},\ y_{r,2},\ \cdots,\ y_{r,n},\ \cdots \qquad r = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p,$$

sämtlich in einem Kontinuum K gleichmäßig konvergieren, und ist $\varphi(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_p)$ eine rationale Funktion ihrer p Variabeln, so hat man die Zahlenfolge

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \cdots,$$

wo allgemein $\varphi_n = \varphi(y_{1,n},\ y_{2,n},\ \cdots,\ y_{p,n})$ gesetzt worden ist, zu untersuchen.

§ 82. Gleichmäßig konvergente Reihen.

Die unendliche Reihe

$$(1) \qquad s(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

deren Glieder Funktionen von x sind, ist *gleichmäßig* konvergent im Kontinuum K, wenn die aus den Partialsummen

$$s_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

gebildete Zahlenfolge

$$s_0(x),\ s_1(x),\ s_2(x),\ \cdots,\ s_n(x),\ \cdots$$

in K gleichmäßig konvergiert. Führt man das Restglied

$$(2) \qquad R_{n,p}(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x) = \sum_{q=1}^{q=p} u_{n+q}(x)$$

der Reihe (1) ein, so hat man wegen § 81, (3) den Satz:

I. *Die unendliche Reihe* (1) *ist dann und nur dann im Kontinuum K gleichmäßig konvergent, wenn es für eine vorgegebene willkürlich kleine positive von Null verschiedene Größe ε möglich ist, eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n > N$, indem p eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, immer*

$$(3) \qquad |R_{n,p}(x)| < \varepsilon$$

wird, welchen Wert aus K man auch für x einsetzt.

Beispiel 1. Die unendliche Reihe

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$$

ist für jeden endlichen reellen Wert von x gleichmäßig konvergent; denn es ist

$$\left| \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\cos(n+s)x}{(n+s)^2} \right| \leq \sum_{s=1}^{s=p} \frac{1}{(n+s)^2} < \sum_{s=1}^{s=p} \frac{1}{(n+s-1)(n+s)} \leq \frac{1}{n}.$$

Beispiel 2. Aus der offenbaren Identität

$$\frac{x}{(px+1)((p+1)x+1)} = \frac{1}{px+1} - \frac{1}{(p+1)x+1}$$

findet man für die unendliche Reihe

$$(4) \qquad s(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \cdots,$$

die Summe $s(x) = 1$, während man für die Partialsumme und das Restglied die Ausdrücke

$$s_n(x) = 1 - \frac{1}{(n+1)x+1}, \quad R_n(x) = \frac{1}{(n+1)x+1} = s(x) - s_n(x)$$

findet. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, daß die unendliche Reihe (4) in jedem Kontinuum, für welches die untere Grenze für $|x|$ nicht 0 ist, gleichmäßig konvergiert; für $x = 0$ ist die Konvergenz unserer Reihe unendlich langsam; man hat z. B.

$$R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2};$$

es liegt aber auf der Hand, daß unsere Reihe (4) auch für $x = 0$ mit der Summe 1 konvergiert.

Beispiel 3. Bezeichnet G_n die obere Grenze von $|u_n(x)|$, indem x das Kontinuum K durchläuft, und konvergiert die Reihe mit positiven Gliedern ΣG_n, so ist die Reihe (1) in diesem Kontinuum K gleichmäßig konvergent.

Der Begriff gleichmäßig konvergente Reihen ist beinahe gleichzeitig von Stokes[1]) und Seidel[2]), am klarsten bei dem letzten, eingeführt worden; aber zuerst durch die Vorlesungen Weierstraß' ist die fundamentale Bedeutung dieses Begriffes in helles Licht getreten.

Denken wir uns, daß die Glieder $u_n(x)$ der Reihe (1) im Kontinuum K für jedes n stetige Funktionen sind, so ist sicher jede

1) Transactions of the Cambridge phil. Society, Bd. 8, p. 533; 1848.

2) Abhandlungen der Münchener Akademie Bd. 7; 1848. Ostwalds Klassiker Nr. 116 (1900).

einzelne Partialsumme auch eine in K stetige Funktion von x; aus § 81, I finden wir daher unmittelbar den folgenden Satz:

II. *Sind die Glieder $u_n(x)$ der unendlichen Reihe* (1) *sämtlich in x stetige Funktionen, wenn x das Kontinuum K durchläuft, und ist außerdem die Reihe* (1) *in diesem Kontinuum gleichmäßig konvergent, so ist die Reihensumme $s(x)$ eine in K stetige Funktion von x.*

Cauchy[1]) behauptete, daß $s(x)$ eine im Kontinuum K stetige Funktion von x sei, wenn die einzelnen Reihenglieder in K stetig sind, und die Reihe (1) außerdem konvergiert, wenn x dies Kontinuum durchläuft; schon Abel[2]) bemerkte, daß diese Behauptung im allgemeinen nicht richtig sein kann; aber erst viel später hat Cauchy[3]) die Richtigkeit dieses Einwandes erklärt.

Wenn die Reihenglieder $u_n(x)$ sämtlich in K stetig sind, während dies mit der Reihensumme $s(x)$ nicht der Fall ist, so kann die Reihe (1) sicher in K *nicht* gleichmäßig konvergieren.

Die Reihe (4) ist nicht in einem Kontinuum, welches den Wert $x = 0$ enthält, gleichmäßig konvergent; ihre Summe ist aber doch in diesem Kontinuum stetig.

Beispiel 4. Die Reihe

$$s(x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \cdots$$

ist sicher für $0 \leqq x < 2$ konvergent; das Restglied ist

$$R_n(x) = \frac{x \cdot (1-x)^n}{1-(1-x)} = (1-x)^n;$$

für $0 < x < 2$ ist unsere Reihe daher gleichmäßig konvergent mit der Summe $s(x) = 1$; für $x = 0$ konvergiert diese Reihe aber unendlich langsam; man hat z. B.

$$R_n\left(1 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n^2}}\right)^n = e^{-\frac{1}{n}},$$

also bei hinreichend großen n von 1 beliebig wenig verschieden; für $x = 0$ hat unsere Reihe die Summe 0. Die Reihensumme $s(x)$ ist demnach für $x = 0$ (wo die Reihe nicht gleichmäßig konvergiert) *unstetig.*

---

166. Es ist zu beweisen, daß die unendliche Reihe

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^2(x^2+2^2)(x^2+4^2)\cdots(x^2+(2n-2)^2)}{(2n)!}$$

für jeden endlichen Wert von x gleichmäßig konvergiert.

1) Analyse algébrique, p. 131; 1821.

2) Journal für Mathematik Bd. 1; 1826. Œuvres Bd. 1, p. 224.

3) Comptes rendus Bd. 36, p. 454—459; 1853.

167. Man soll beweisen, daß die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n!)^4 \left(x + \frac{3n+1}{2}\right)}{(2n+1)!\, x^2 (x+1)^2 \cdots (x+n)^2}$$

für jeden endlichen Wert, der weder Null noch negativ ganz ist, gleichmäßig konvergiert, und daß für positive a, x willkürlich endlich,

$$\lim_{a=+\infty} f(x+a) = 0$$

ist.

168. Es ist zu beweisen, daß die durch die unendliche Reihe in Aufgabe 167 definierte Funktion $f(x)$ der Fundamentalgleichung

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

genügt; dadurch soll man endlich für $f(x)$ diese andere Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots$$

herleiten (**Catalan**)[1]).

169. Man hat für reelle x die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (n x e^{-n x^2} - (n+1) x e^{-(n+1)x^2})$$

zu untersuchen und das Restglied $R_n(x)$ z. B. für $x = n^{-\frac{1}{2}}$ zu betrachten (**Darboux**).[2])

170. Man soll die unendliche Reihe $s(x) = \Sigma u_n(x)$ und ihre Summe untersuchen, indem $u_n(x)$ durch die Ausdrücke

$$u_n(x) = (1-x)x^n, \quad u_n(x) = (1+x)(-x)^n$$

von $n = 0$ an zu definieren ist, je nachdem x rational oder irrational ist.

171. Die periodische Funktion $\alpha(x)$ mit der additiven Periode $+1$, also $\alpha(x+1) = \alpha(x)$, wird so definiert, daß $\alpha(x) = x$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ist, während $\alpha(x) = x - 1$ für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ zu setzen ist. Man hat zu beweisen, daß die Funktion

$$f(x) = \frac{\alpha(x)}{1^2} + \frac{\alpha(2x)}{2^2} + \frac{\alpha(3x)}{3^2} + \frac{\alpha(4x)}{4^2} + \cdots$$

unstetig ist für $x = (2p+1):(2n)$, wo dieser Bruch irredu-

1) Mémoire sur la transformation des séries, p. 18. Mém. couronnès et de sav. étrangers de l'Acad. de Belgique Bd. 33; 1865.

2) Annales de l'Ecole Normale (2) Bd. 4; 1875.

ziebel ist, und die Sprünge der Funktion für diesen Wert von x zu bestimmen. Wie verhält sich diese Funktion für jeden andern reellen Wert von x? (Riemann)[1]).

§ 83. Gleichmäßig konvergente Produkte.

Das unendliche Produkt

$$P(x) = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + u_n(x)), \tag{1}$$

dessen Faktoren Funktionen von x sind, heißt gleichmäßig konvergent im Kontinuum K, wenn die aus den Partialprodukten

$$P_n(x) = \prod_{r=0}^{r=n} (1 + u_r(x)) \tag{2}$$

gebildete Zahlenfolge

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \cdots,\ P_n(x),\ \cdots \tag{3}$$

in K gleichmäßig gegen ihren endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert $P(x)$ konvergiert.

Betrachten wir nunmehr die unendliche Reihe

$$L(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \log(1 + u_n(x)) = \log P(x) + 2q\pi i, \tag{4}$$

so sind die Partialsummen $L_n(x)$ dieser Reihe für jedes n mit den Partialprodukten (3) durch die Gleichungen

$$L_n(x) = \log P_n(x) + 2r\pi i, \quad P_n(x) = e^{L_n(x)} \tag{5}$$

verbunden, woraus der folgende Satz ohne Mühe entfließt:

I. *Das unendliche Produkt* (1) *ist in einem Kontinuum K dann und nur dann gleichmäßig konvergent, wenn die unendliche Reihe* (4) *auch in K gleichmäßig konvergiert.*

Ist nämlich die Reihe (4) in K gleichmäßig konvergent, und setzt man

$$L(x) = L_n(x) + \varrho_n(x),$$

so ist für $n \geqq N$ immer $|\varrho_n(x)| < \varepsilon$, indem x das Kontinuum K durchläuft, und wir erhalten somit wegen (4) und (5)

$$P(x) = e^{L_n(x) + \varrho_n(x)} = P_n(x)\, e^{\varrho_n(x)},\ P(x) - P_n(x) = P(x) \cdot (1 - e^{-\varrho_n(x)});$$

da nun $P(x)$ endlich ist, und da $e^{-\varrho_n(x)}$ seinem Grenzwerte 1 gleichmäßig zustrebt, wenn n über jede Grenze hinauswächst, indem x

1) Göttinger Abhandlungen 1867. Werke, p. 242.

das Kontinuum K durchläuft, so ist das Produkt (1) in K gleichmäßig konvergent.

Ist umgekehrt das Produkt (1) in K gleichmäßig konvergent, und setzt man

$$P(x) = P_n(x)\,(1 + \sigma_n(x)),$$

so ist für $n \geqq N$ immer $|\sigma_n(x)| < \varepsilon$, indem x das Kontinuum durchläuft, und man hat

$$L(x) = L_n(x) + \log(1 + \sigma_n(x)) + 2q\pi i;$$

da nun $\log(1 + \sigma_n(x))$ seinem Grenzwerte 0 gleichmäßig zustrebt, so ist auch die Reihe (4) in K gleichmäßig konvergent.

Speziell findet man den folgenden Satz:

II. *Ist die Reihe mit positiven Gliedern* $\Sigma\,|u_n(x)|$ *in einem Kontinuum* K *gleichmäßig konvergent, so konvergiert das unendliche Produkt* (1) *auch in* K *gleichmäßig, wenn keine der Funktionen* $u_n(x)$ *den Wert* -1 *annehmen kann, indem* x *das genannte Kontinuum* K *durchläuft.*

Aus der Identität

$$\log(1 + u_n(x)) = u_n(x) \cdot k_n,$$

wo k_n zwar mit x variiert, aber so daß die Zahlenfolge

$$k_0,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ \ldots \tag{6}$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte 1 ist, indem x das Kontinuum K durchläuft, ergibt sich ohne Mühe

$$\left|\sum_{s=1}^{s=p} \log(1 + u_{n+s}(x))\right| \leqq G \cdot \sum_{s=1}^{s=p} |u_{n+s}(x)|,$$

indem G die obere Grenze der absoluten Beträge der Zahlen (6) bezeichnet; damit ist unser Satz aber bewiesen.

Aus dem allgemeinen Satze § 81, I finden wir hier speziell:

III. *Sind sämtliche Funktionen* $u_n(x)$ *in einem Kontinuum* K *stetige Funktionen von* x, *und konvergiert außerdem das Produkt* (1) *gleichmäßig in* K, *so ist der Wert* $P(x)$ *dieses Produktes eine in* K *stetige Funktion von* x.

Als erstes Beispiel betrachten wir das unendliche Produkt

$$P(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}; \tag{7}$$

aus der Entwicklung

$$e^{-\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x^3}{6n^3} \cdot K_n,$$

wo K_n stets endlich bleibt, wenn x nur endlich angenommen wird, ergibt sich wegen (7)

$$P(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{n^3} \cdot K_n'\right);$$

es ist demnach

$$u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{n^3} \cdot K_n'$$

zu setzen.

Dem Satze II zufolge ist das unendliche Produkt (7) gleichmäßig konvergent für alle endlichen x, die nicht negativ ganz sind, und die Funktion $P(x)$ ist für alle diese Werte eine in x stetige Funktion. Ist x negativ ganz, und läßt man aus (7) den Null werdenden Faktor weg, so ist das so erhaltene Produkt auch für diesen Wert von x konvergent.

Die Funktion $P(x)$ verschwindet offenbar für negative ganze Werte von x aber sonst für keinen anderen endlichen Wert von x.

Aus II haben wir noch den spezielleren Satz herzuleiten:

IV. *Konvergiert das Produkt* $\Pi(1 + |u_n|)$ *mit positiven Faktoren, so ist das andere unendliche Produkt* $\Pi(1 + u_n \cdot x)$ *für jeden endlichen Wert von* x *gleichmäßig und unbedingt konvergent, außer wenn es gegen Null divergiert; das letzte Produkt stellt aber für alle endlichen* x *eine in* x *stetige Funktion dar, und es gilt eine Entwicklung von der Form*

$$(8) \qquad \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + u_n \cdot x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

wo die Reihe rechter Hand für jeden endlichen Wert von x *gleichmäßig und unbedingt konvergiert.*

Wenden wir nämlich die Formel § 59, (10) an und führen wir die Rechnungen rechter Hand aus, so werden die zu den verschiedenen Potenzen von x gehörigen Koeffizienten durch Reihen dargestellt, die sicher konvergieren, wenn man anstatt jedem u_n seinen absoluten Betrag $|u_n|$ einführt. Nehmen wir nun sämtliche Potenzen von x bis zu x^n aus, so haben wir aus dem ausgerechneten Produkte sämtliche vom Partialprodukte P_n herrührende Glieder und außerdem noch andere Glieder mitgenommen. Da nun die übrigbleibende Summe mit unendlich wachsendem n gegen Null konvergiert, selbst wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt, so ist unser Satz damit bewiesen.

172. Ist $|a|>1$, so hat man die folgende von Euler[1]) herrührende Formel:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{a^n}\right)=1+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^p x^p}{(a-1)(a^2-1)\cdots(a^p-1)}.$$

173. Setzt man $|a|<1$ und $|x|<1$ voraus, so hat man die folgende von Euler[2]) herrührende Formel:

$$\prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{1-a^n x}=1+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{x^p}{(1-a)(1-a^2)\cdots(1-a^p)}.$$

§ 84. Grenzwert von Gauß. Die Gammafunktion.

Als eine Anwendung der vorhergehenden Entwicklungen über gleichmäßig konvergente Produkte wollen wir den speziellen Satz beweisen:

I. *Setzt man für positive ganze n*

$$\Gamma_n(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \tag{1}$$

so ist die Zahlenfolge

$$\Gamma_1(x),\ \Gamma_2(x),\ \Gamma_3(x),\ \cdots,\ \Gamma_n(x),\ \cdots \tag{2}$$

für alle endlichen x, die nicht 0 oder negativ ganz sind, gleichmäßig konvergent; der Grenzwert dieser Zahlenfolge heißt die Gammafunktion und kann auch durch das unendliche Produkt

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-Cx}}{x}\cdot\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}, \tag{3}$$

wo C die Eulersche Konstante bezeichnet, dargestellt werden.

Schreiben wir der Kürze halber

$$\Gamma_n(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{x\log n}}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}, \tag{4}$$

und setzen wir

$$C_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n, \tag{5}$$

also

$$C=\lim_{n=\infty}C_n, \tag{6}$$

1) Introductio in analysin infinitorum Bd. I, § 306; 1748.

2) loc. cit. p. 313.

so ergibt sich, wenn wir aus (4) $\log n$ wegen (5) wegschaffen

$$\Gamma_n(x) = \frac{e^{-C_n x}}{x} \cdot \prod_{p=1}^{p=n-1} \frac{e^{\frac{x}{p}}}{1+\frac{x}{p}}$$

und unser Satz ist demnach eine unmittelbare Folge des im vorhergehenden Paragraphen über das unendliche Produkt § 83, (7) entwickelten.

Dadurch finden wir noch unmittelbar den Satz:

II. *Die Gammafunktion ist für jeden endlichen Wert von x, der jedoch weder Null noch negativ ganz sein darf, eine in x stetige Funktion, und sie verschwindet für keinen endlichen Wert von x.*

Setzt man in (1) $x+1$ anstatt x, so erhält man

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{nx}{x+n} \cdot \Gamma_n(x),$$

woraus der neue Satz entfließt:

III. *Die Gammafunktion genügt der Fundamentalgleichung*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{7}$$

Da nun für jedes n immer

$$\Gamma_n(1) = 1$$

ist, so hat man ebenfalls $\Gamma(1) = 1$ und daraus allgemeiner wegen (7), indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) = (n-1)! \tag{8}$$

Für den allgemeinen Binomialkoeffizienten

$$\binom{x-1}{n} = (-1)^n \frac{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}$$

erhalten wir wegen (1) den Ausdruck

$$\binom{x-1}{n} = (-1)^n \cdot \frac{n^{-x}}{\Gamma_n(1-x)}, \tag{9}$$

der uns später nützlich sein wird.

Der Grenzwert

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \right] = \lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) \tag{10}$$

rührt von Gauß[1]) her, während die Produktentwicklung (3) beinahe gleichzeitig von Schlömilch[2]) und Newman[3]) gefunden worden ist.

1) Comment. Götting. Bd. 2, p. 25—26; 1812. Werke Bd. III, p. 145.
2) Grunert Archiv Bd. 4, p. 171; 1844. Analytische Studien, I, p. 45; 1848.
3) Cambridge and Dublin math. Journal Bd. 3, p. 57—60; 1848.

Wir haben schon bemerkt, daß für $x = 1$ sämtliche Elemente der Zahlenfolge (2) den Wert 1 annehmen; allgemeiner gilt der Satz:

IV. *Für endliche reelle x, ganze Werte kleiner als 2 ausgeschlossen, ist die Zahlenfolge (2) immer monoton und zwar wachsend für $x > 1$ oder $-2n+1 > x > -2n$, n positiv ganz, sonst aber immer abnehmend.*

Es ist in der Tat

$$\frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_{n+1}(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x},$$

und also ergibt sich wegen § 24, (18)

$$\frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_{n+1}(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x(x+1)}{2n^2}+\frac{k_n}{n^3}\right)$$

wo k_n für alle n endlich bleibt; durch Ausrechnung erhält man daher

$$\frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_{n+1}(x)} = 1 - \frac{x(x-1)}{2n^2} + \frac{l_n}{n^3}, \tag{11}$$

wo l_n hinwiederum für alle n endlich bleibt; es ist demnach für hinlänglich große n der Quotient linker Hand in (11) größer als 1 oder kleiner als 1 je nachdem $1 > x > 0$ oder nicht angenommen wird.

Für hinlänglich große n haben aber die $\Gamma_n(x)$ alle dasselbe Vorzeichen, und damit ist unser Satz also bewiesen.

174. Für ganze, nicht negative n hat man den Grenzwert

$$\lim_{x=-n}(x+n)\,\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

175. Wenn γ weder Null noch negativ ganz ist, und zwei der Zahlen α, β und γ feste bestimmte Werte haben, während die dritte in solcher Weise variiert, daß immer $\Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ ist, so ist die unendliche Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

unbedingt und gleichmäßig konvergent; ist aber $\Re(\gamma-\alpha-\beta) \leq 0$, so kann diese Reihe niemals konvergieren, wenn sie wirklich unendlich sein soll.

Kapitel XX.

Trigonometrische Reihen.

§ 85. Konvergenzkriterien. Satz von Malmstèn.

Unter den trigonometrischen Reihen müssen wir uns auf den folgenden Typus

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wo die Koeffizienten a_n und b_n sämtlich von x unabhängig sind, beschränken. Da die allgemeine Frage über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Reihe (1) überaus große Schwierigkeiten darbietet, so müssen wir uns hier auf den folgenden Satz, der in speziellerer Form von Malmstèn[1]) gegeben worden ist, beschränken:

I. *Wenn die Koeffizienten a_n die beiden folgenden Bedingungen befriedigen:* 1. $\lim a_n = 0$ *für* $n = \infty$, 2. *die Reihe* $\Sigma\,|\,a_n - a_{n+1}\,|$ *ist konvergent, so ist jede einzelne der beiden Reihen* $\Sigma\, a_n \cos nx$ *und* $\Sigma\, a_n \cos nx$ *in jedem Intervalle* $[2p\pi - \sigma,\ 2p\pi + \sigma]$, *wo* p *eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet, während* σ *eine willkürlich kleine von Null verschiedene positive Zahl ist, gleichmäßig konvergent.*

Die Konvergenz der beiden obengenannten Reihen ist eine unmittelbare Folge des Satzes § 39, II; denn die beiden Reihen $\Sigma \cos nx$ und $\Sigma \sin nx$ oszillieren zwischen endlichen Grenzen, wenn $x \neq 2p\pi$ ist. Um die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihen in helleres Licht zu stellen, wollen wir unseren Satz folgendermaßen beweisen: Betrachten wir die Kosinusreihe, und multiplizieren wir das Restglied $R_{n,p}(x) = a_{n+1}\cos(n+1)x + a_{n+2}\cos(n+2)x + \cdots + a_{n+p}\cos(n+p)x$ durch $2\sin\frac{1}{2}x$, so erhalten wir unter Anwendung der Identität

$$(2) \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos mx = \sin(m+\tfrac{1}{2})x - \sin(m-\tfrac{1}{2})x$$

den folgenden Ausdruck

$$2R_{n,p}(x)\sin\tfrac{1}{2}x = -a_{n+1}\sin(n+\tfrac{1}{2})x + a_{n+p}\sin(n+p+\tfrac{1}{2})x + \sum_{s=1}^{s=p-1}(a_{n+s} - a_{n+s+1})\cdot\sin(n+s+\tfrac{1}{2})x,$$

woraus der Majorantwert folgt:

$$(3) \quad 2\,|\,R_{n,p}(x)\,|\cdot\sin\tfrac{1}{2}x\,| \leq |\,a_{n+1}\,| + |\,a_{n+p}\,| + \sum_{s=1}^{s=p-1} |\,a_{n+s} - a_{n+s+1}\,|\,.$$

1) Nova Acta Upsalensis Bd. 12, p. 255; 1844.

Den beiden Voraussetzungen über die Koeffizienten a_n zufolge ist es für ein vorgegebenes willkürlich kleines ε möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer die Summe rechter Hand in (3) kleiner als ε wird; ist außerdem

$$2q\pi + \alpha < x \leqq (2q+2)\pi - \alpha,$$

so hat man auch

$$|\sin \frac{x}{2}| \geqq \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

und somit ergibt sich wegen (3)

$$|R_{n,p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

womit unser Satz für die Kosinusreihe bewiesen ist.

Ganz in derselben Weise kann man die Sinusreihe behandeln.

Malmstèn betrachtete nur denjenigen Fall, wo die Zahlenfolge $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n \ldots$ monoton abnehmend mit dem Grenzwerte Null war.

Setzt man in den oben betrachteten Reihen $x + \pi$ anstatt x, so leuchtet ein, daß die beiden Reihen $\Sigma (-1)^n a_n \cos nx$ und $\Sigma (-1)^n a_n \sin nx$ unter denselben Voraussetzungen wie vorher in jedem Intervalle von der Form $(2p-1)\pi + \alpha \leqq x \leqq (2p+1)\pi - \alpha$ gleichmäßig konvergieren. Diese Reihen können übrigens auch direkt behandelt werden, indem man das Restglied mit $2 \cos \frac{1}{2}x$ multipliziert.

Unter Anwendung der in § 42 gegebenen Entwicklungen leitet man nunmehr unmittelbar aus I den folgenden spezielleren Satz, den man Weierstraß[1]) verdankt, ab:

II. *Existiert für die Koeffizienten a_n eine Entwicklung von der Form*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha + i\beta}{n} + \ldots, \tag{5}$$

wo α positiv ist, so konvergieren die beiden Reihen $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma a_n \sin nx$ gleichmäßig in jedem der Intervalle $2p\pi + \alpha \leqq x \leqq (2p+2)\pi - \alpha$.

Aus diesen Entwicklungen geht unmittelbar hervor, daß die durch die Reihensumme (1) definierte Funktion der *reellen* Ver-

1) Journal für Mathematik Bd. 51; 1856. Abhandlungen aus der Funktionenlehre p. 220; 1886. Werke Bd. I, p. 185.

änderlichen x im allgemeinen nicht für $x = 2p\pi$ bzw. $x = (2p+1)\pi$ stetig sein kann.

176. Es ist zu beweisen, daß, wenn der reelle Winkel θ kein Vielfaches von 2π ist, die Reihensumme

$$\frac{e^{i\theta}}{1^x} + \frac{e^{i2\theta}}{2^x} + \frac{e^{i3\theta}}{3^x} + \cdots + \frac{e^{in\theta}}{n^x} + \cdots$$

immer eine in x stetige Funktion sein muß, wenn $\Re(x)$ positiv ist.

§ 86. Rechnen mit trigonometrischen Reihen.

Es liegt auf der Hand, wie man eine endliche Anzahl trigonometrischer Reihen von der Form § 85, (1) addiert oder subtrahiert, und daß das so erhaltene Resultat immer als eine Reihe derselben Form dargestellt werden kann. Über die Multiplikation zweier trigonometrischen Reihen gilt der Satz:[1])

I. *Wenn die Koeffizienten der vier trigonometrischen Reihen*

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx, & f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos nx \\ g_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin nx, & g_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx \end{cases}$$

die beiden folgenden Bedingungen befriedigen: 1. *daß*

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \sum_{p=1}^{p=n} a_p b_{n-p} = 0$$

ist, und 2. *daß mindestens eine der vier Reihen mit positiven Gliedern*

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} |a_n \pm a_{n+1}|, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |b_n \pm b_{n+1}$$

konvergiert, so sind die vier Produkte

$$(4)\qquad f_1(x) f_2(x),\ f_1(x) g_2(x),\ f_2(x) g_2(x),\ g_1(x) g_2(x)$$

nach der Cauchyschen Multiplikationsregel zu entwickeln, wenn die zu multiplizierenden Reihen beide konvergieren für den betrachteten Wert von x, und wenn dieser kein Vielfaches von π ist.

Betrachten wir zuerst die beiden Kosinusreihen $f_1(x)$ und $f_2(x)$,

1) Annali di Matematica 1907.

und setzen wir voraus, daß die Reihe $\Sigma\,|\,b_n - b_{n+1}\,|$ konvergiert, so schreiben wir das Restglied § 44, (2) in der Form

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} R_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x \cdot (b_n \cos n\,x + b_{n-1} \cos (n-1)\,x + \cdots \\ + b_{n-s+1} \cdot \cos (n-s+1)\,x). \end{aligned} \right.$$

Um das Verhalten dieses Restglieds für unbegrenzt wachsendes n zu untersuchen, multiplizieren wir die Gleichung (5) mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und erhalten dann wegen § 85, (2)

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x\, R_n = A - B + C,$$

wo der Kürze halber

$$(6)\qquad A = b_n \sin (n + \tfrac{1}{2})\,x \cdot \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x$$

$$(7)\qquad B = \sum_{s=1}^{s=n} a_s\, b_{n-s+1} \cdot \cos s\,x \sin (n - s + \tfrac{1}{2})\,x$$

$$(8)\qquad C = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x \cdot (U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_{n-s+1})$$

gesetzt worden ist, und wo in (8) die U folgende Bedeutung haben

$$(9)\qquad U_m = (b_m - b_{m+1}) \sin (m + \tfrac{1}{2})\,x\,.$$

Bedeutet nun ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe, und beachtet man, daß die beiden Reihen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ konvergieren, so ist es offenbar möglich eine solche positive ganze Zahl N_1 zu bestimmen, daß für $n \geqq N_1$ immer

$$(10)\qquad |\,A\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Wegen (7) und (2) ist es aber möglich eine solche positive ganze Zahl N_2 zu bestimmen, daß für $n \geqq N_2$ immer

$$(11)\qquad |\,B\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Weiter ist wegen (9) und (4) die Reihe $\Sigma\,|\,U_m\,|$ konvergent: durch dieselben Überlegungen wie in den beiden Paragraphen 44 und 45 ergibt sich daher, daß es auch möglich ist eine solche positive ganze Zahl N_3 zu bestimmen, daß für $n \geqq N_3$ immer

$$(12)\qquad |\,C\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sein muß.

Ist nun N die größte der drei Zahlen N_1, N_2 und N_3, so hat man für $n \geqq N$ immer

$$|2 \sin \frac{x}{2} \cdot R_n| < \varepsilon, \tag{13}$$

und damit ist dieser Fall unseres Satzes bewiesen.

Ist die Reihe $\Sigma |b_n + b_{n+1}|$ konvergent, so multipliziert man die beiden Seiten in (5) mit $2 \cos \frac{1}{2} x$, und die obenstehende Entwicklung gilt auch in diesem Falle.

Ganz in derselben Weise werden die übrigen der Produkte (4) behandelt.

Da nun außerdem das Restglied R_n in (5) in den a_p und b_q symmetrisch sein muß, so ist unser Satz hiermit vollständig bewiesen.

Wir haben also eine Entwicklung von der Form

$$f_1(x) f_2(x) = V_2 + V_3 + V_4 + \cdots + V_n + \cdots \tag{14}$$

gefunden, wo der Kürze halber

$$V_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} a_s b_{n-s} \cos sx \cos (n-s) x$$

gesetzt worden ist; wir können indessen sehr leicht diesen Ausdruck für V_n, und zwar unter Zuhilfenahme der elementaren Identität

$$2 \cos sx \cos (n-s) x = \cos nx + \cos (n-2s) x,$$

umformen. Setzen wir noch

$$w_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1, \tag{15}$$

so ergibt sich in der Tat

$$V_n = \tfrac{1}{2} w_n \cos nx + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}}{}' (a_s b_{n-s} + a_{n-s} b_s) \cos (n-2s) x, \tag{16}$$

wo der Strich nach dem Summenzeichen rechter Hand angibt, daß für ein gerades n das letzte Glied zu halbieren ist.

In ganz ähnlicher Weise finden wir die beiden anderen Formeln

$$f_1(x) g_2(x) = V_2' + V_3' + V_4' + \cdots + V_n' + \cdots \tag{17}$$

$$g_1(x) g_2(x) = V_2'' + V_3'' + V_4'' + \cdots + V_n'' + \cdots, \tag{18}$$

wo der Kürze halber

$$V_n' = \tfrac{1}{2} w_n \sin nx + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (a_s b_{n-s} - b_s a_{n-s}) \sin (n-2s) x \tag{19}$$

$$(20)\quad V_n'' = -\tfrac{1}{2} w_n \cos nx + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' (a_s b_{n-s} + b_s a_{n-s}) \cos (n-2s)\, x$$

gesetzt worden sind, und wo der Strich nach dem Summenzeichen in (20) dieselbe Bedeutung wie in (16) hat.

Aus den in § 46 entwickelten Sätzen ergibt sich ohne weiteres der folgende merkwürdige Spezialfall unseres Satzes I:

II. *Wenn die beiden Zahlenfolgen mit positiven Elementen*

$$a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n \cdots, \quad b_1\ b_2\ b_3 \cdots b_n \cdots$$

monoton abnehmend mit dem Grenzwerte Null sind, so können die Produkte (4) *nach der Cauchyschen Multiplikationsregel ausgerechnet werden, falls das Produkt der beiden alternierenden Reihen* $\Sigma (-1)^n a_n$ *und* $\Sigma (-1)^n b_n$ *diese Eigenschaft besitzt.*

---

177. Mit denselben Bezeichnungen wie in § 86 gelten die Formeln

$$\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos nx\right) - \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin nx\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx\right) = \sum_{n=2}^{n=\infty} w_n \cos nx$$

$$\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin nx\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos nx\right) + \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx\right) = \sum_{n=2}^{n=\infty} w_n \sin nx.$$

§ 87. Satz von Pringsheim.

Mit Pringsheim betrachten wir denjenigen Spezialfall unseres Satzes § 86, II, für welchen die Reihe mit positiven Gliedern

$$(1)\qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n + \cdots$$

konvergiert; dieser Fall bietet ein besonderes Interesse dar, indem wir unter Zuhilfenahme der in § 46 entwickelten Formeln beweisen wollen, daß die Konvergenz der Reihe (1) eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die im Satze § 86, II betrachteten Produkte hinwiederum in trigonometrische Reihen entwickelt werden können, indem wir einfacher Weise die Glieder der Produktreihen nach $\cos nx$ bzw. $\sin nx$ ordnen.

Schreiben wir in der Tat die Reihe § 86, (14) folgendermaßen

$$(2) \qquad f_1(x)\,f_2(x) = (V_2 + V_3 + V_4 + \cdots + V_n) + R_n,$$

so enthält die eingeklammerte Summe rechter Hand sämtliche Produkte $a_p\,b_q$, für welche $p + q < n$ ist, und keine anderen; setzen wir daher der Kürze halber

$$(3) \qquad \begin{cases} A'_{p,n} = b_1\,a_{p+1} + b_2\,a_{p+2} + \cdots + b_r\,a_{p+r} \\ B'_{p,n} = a_1\,b_{p+1} + a_2\,b_{p+2} + \cdots + a_r\,b_{p+r}, \end{cases}$$

wo für ein aufgegebenes p die Zahl r so zu bestimmen ist, daß $p + 2r = n$ oder $p + 2r = n - 1$, je nachdem $n - p$ gerade oder ungerade ist, so ergibt sich

$$(4) \qquad \sum_{p=2}^{p=n} V_p = A'_{0,n} + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (w_s + A'_{s,n} + B'_{s,n}) \cos sx.$$

Führen wir nunmehr die in § 46 betrachteten Reihen

$$A_q = a_{q+1}\,b_1 + a_{q+2}\,b_2 + \cdots + a_{q+s}\,b_s + \cdots$$
$$B_q = b_{q+1}\,a_1 + b_{q+2}\,a_2 + \cdots + b_{q+s}\,a_s + \cdots,$$

also speziell

$$A_0 = B_0 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_q b_q + \cdots$$

ein, und setzen wir der Kürze halber

$$A''_{p,n} = A_p - A'_{p,n} = \sum_{s=1}^{s=\infty} b_{r+s}\,a_{p+r+s}$$

$$B''_{p,n} = B_p - B'_{p,n} = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{r+s}\,b_{p+r+s},$$

so ergibt sich aus (2) und (4), daß

$$(5) \qquad f_1(x) f_2(x) = A_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (w_s + A_s + B_s) \cos sx + R'_n,$$

wo der Kürze halber

$$(6) \qquad R'_n = R_n - A'_{0,n} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (A''_{s,n} + B''_{s,n}) \cos sx$$

gesetzt worden ist, sein muß.

Ist nun $n-p$ *ungerade*, so enthalten die ersten Glieder der beiden Reihen $A''_{p,n}$ und $A''_{p+1,n}$ den Faktor b_{r+1}; es ist demnach in diesem Falle

$$A''_{p,n} > A''_{p+1,n};$$

ist aber $n - p$ *gerade*, so enthält das erste Glied in $A''_{p,n}$ den

Faktor b_{r+1}, das erste Glied in $A''_{p+1,n}$ aber den Faktor b_r, und es ist demnach hier

$$A''_{p,n} > A''_{p+1,n} - b_r a_{p+r+1};$$

setzen wir also, je nachdem $n-p$ ungerade oder gerade ist

$$\alpha_{p,n} = 0, \quad \alpha_{p,n} = b_r a_{p+r+1},$$

so ist immer

$$A''_{p,n} - A''_{p+1,n} + \alpha_{p,n} > 0, \tag{7}$$

und weiter hat man

$$\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \cdots + \alpha_{n,n} < w_{n+1}. \tag{8}$$

Nach diesen Vorbereitungen haben wir nunmehr das Restglied R'_n in (6) zu untersuchen; bedeutet ε eine vorgegebene willkürlich kleine positive Größe, so ist es möglich eine solche positive ganze Zahl N_1 zu bestimmen, daß für $n \geq N_1$ immer

$$|R_n| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad A'_{0,n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

sind; denn R_n und $A'_{0,n}$ sind ja Restglieder zweier konvergenter Reihen; weiter setzen wir

$$v_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n} A''_{s,n} \cos sx$$

und erhalten somit

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot v_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n-1} (A''_{s,n} - A''_{s+1,n}) \sin \left(s + \frac{1}{2}\right) x + A''_{n,n} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \\ - A''_{1,n} \sin \frac{x}{2},$$

woraus, indem wir noch die Reihe

$$v'_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n-1} \alpha_{s,n} \sin \left(s + \frac{1}{2}\right) x$$

einführen, die neue Gleichheit folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sin \frac{x}{2} v_n(x) + v'_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n-1} (A''_{s,n} - A''_{s+1,n} + \alpha_{s,n}) \sin \left(s + \frac{1}{2}\right) \\ \qquad + A''_{n,n} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - A'_{1,n} \sin \frac{x}{2}; \end{array} \right. \tag{9}$$

da nun wegen (8) $|v'_n(x)| < w_{n+1}$ ist, während $A''_{s,n} - A''_{s+1,n} + \alpha_{s,n} > 0$ sein muß, so erhalten wir aus (9)

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot v_n(x) < w_{n+1} + \sum_{s=1}^{s=n-1} (A''_{s,n} - A''_{s+1,n} + \alpha_{s,n}) + A''_{n,n} + A'_{1,n}$$

oder, was offenbar dasselbe ist

$$\left|2\sin\frac{x}{2}\cdot v_n(x)\right| \leqq 2w_{n+1} + 2A''_{1,n};$$

ist demnach x kein Vielfaches von 2π, so ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl N_2 zu bestimmen, daß für $n > N_2$ immer

$$\left|\sum_{s=1}^{s=n} A''_{s,n}\cos sx\right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{10}$$

wird. Ganz in derselben Weise sehen wir, daß es auch möglich sein muß, eine solche positive ganze Zahl N_3 zu bestimmen, daß für $n > N_3$ immer

$$\sum_{s=1}^{s=n} B''_{s,n}\cos sx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{11}$$

wird.

Sei nun N die größte der Zahlen N_1, N_2 und N_3, und ist x kein Vielfaches von 2π, so hat man demnach für $n \geqq N$ immer

$$|R'_n| < \varepsilon,$$

und somit haben wir die Formel

$$f_1(x)f_2(x) = A_0 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}(w_n + A_n + B_n)\cos nx \tag{12}$$

bewiesen.

Ganz in derselben Weise findet man die ähnlichen Entwicklungen

$$f_1(x)g_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}(w_n - A_n + B_n)\sin nx \tag{13}$$

$$g_1(x)g_2(x) = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n + B_n - w_n)\cos nx, \tag{14}$$

und die Anwendbarkeit unserer Methode auf das Produkt

$$\left(\sum(a_n\cos nx + a'_n\sin nx)\right)\cdot\left(\sum(b_n\cos nx + b'_n\sin nx)\right)$$

liegt auf der Hand. Bemerkt man noch die Identität

$$\cos\alpha x\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n\cos nx + a'_n\sin nx) \pm \sin\alpha x\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n\sin nx - a'_n\cos nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n\cos(nx\pm\alpha x) + a'_n\sin(nx\pm\alpha x)),$$

und setzt man px und rx anstatt x und αx, so entfließt der Satz von Pringsheim:[1])

I. *Sind die aus a_n, a'_n, b_n und b'_n gebildeten Zahlenfolgen monoton abnehmend mit den Grenzwerten Null, und konvergieren die vier Reihen mit positiven Gliedern*

$$\Sigma a_n b_n, \quad \Sigma a_n b'_n, \quad \Sigma a'_n b_n, \quad \Sigma a'_n b'_n,$$

so läßt sich das Produkt der beiden trigonometrischen Reihen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(np + r)x \pm a'_n \sin(np + r)x)$$

$$b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n \cos(np + r)x \pm b'_n \sin(np + r)x)$$

nach der Cauchyschen Multiplikationsregel bilden, und die so erhaltene Produktreihe kann wieder durch Umordnung der Reihenglieder direkt in eine gewöhnliche trigonometrische Reihe verwandelt werden.

Dieser Satz gilt natürlich doch nur im allgemeinen nach Ausschließung gewisser spezieller Werte von x.

Wir bemerken aber ausdrücklich, daß die obengenannte Produktreihe vielleicht sehr wohl durch andere Methoden in eine gewöhnliche trigonometrische Reihe verwandelt werden kann, selbst wenn eine *formale* Umformung der Reihe nicht gestattet ist.

---

178. Mit den Bezeichnungen des § 87 konvergiert die Reihe $\Sigma w_n \cos nx$.

179. Man hat den Pringsheimschen Satz auf das Quadrat der Reihe

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

anzuwenden.

Kapitel XXI.

Potenzreihen.

§ 88. Der Konvergenzkreis.

Sind die Koeffizienten a_n sämtlich von x unabhängig, so heißt die unendliche Reihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

1) Mathematische Annalen Bd. 26, p. 165; 1885.

eine *Potenzreihe in* x; über diesen Reihentypus gilt der folgende Satz, der im wesentlichen von Cauchy[1]) herrührt:

I. *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist immer das Innere eines gewissen Kreises K mit dem Mittelpunkte in* $x = 0$*; in diesem Bereiche konvergiert die Reihe unbedingt, und mit der untenstehenden Bedingung* (4) *auch gleichmäßig, während ihr Verhalten auf der Peripherie dieses Kreises sehr verschieden sein kann.*

Dieser Kreis K heißt *Konvergenzkreis*, sein Radius R *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Ist speziell $R = \infty$, so heißt unsere Reihe *beständig* konvergent; ist aber $R = 0$, so konvergiert die Reihe nur für den einen Wert $x = 0$. In unserer folgenden Untersuchung schließen wir diese beiden extremen Fälle aus.

Es sei nun ϱ ein solcher Zahlenwert, daß die Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ konvergiert, wir haben dann erstens zu beweisen, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ gleichmäßig und absolut konvergiert, falls nur $|x| < |\varrho|$ angenommen wird; setzen wir in in der Tat

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \varrho^n \cdot \left(\frac{x}{\varrho}\right)^n,$$

so ergibt sich für das Restglied in $\mathfrak{P}(x)$ der Ausdruck

$$(2) \qquad \left|\sum_{s=1}^{s=p} a_{n+s} x^{n+s}\right| < \sum_{s=1}^{s=p} |a_{n+s}| \cdot |x|^{n+s} = \sum_{s=1}^{s=p} a_{n+s} \varrho^{n+s}| \cdot \left|\frac{x}{\varrho}\right|^{n+s}.$$

Bezeichnet demnach A die obere Grenze der positiven Zahlen $|a_{n+s}\varrho^{n+s}|$ für $s = 1, 2, 3, \ldots, p$, so ist A sicher endlich, weil die Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ konvergiert; aus (2) ergibt sich dann

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=p} |a_{n+s} x^{n+s}| < A \cdot \left|\frac{x}{\varrho}\right|^n \cdot \frac{x}{\varrho - x}, \quad x < \varrho.$$

Es sei nun weiter δ eine willkürlich kleine von Null verschiedene positive Zahl, dann erhalten wir für

$$(4) \qquad x| < |\varrho - \delta$$

wegen (3) den anderen Majorantwert

$$\sum_{s=1}^{s=p} a_{n+s} x^{n+s} \leq A \cdot \left(\frac{|\varrho| - \delta}{\varrho}\right)^n \cdot \frac{\varrho| - \delta}{\delta},$$

woraus deutlich hervorgeht, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ unbedingt und

1) Analyse algébrique; 1821.

gleichmäßig konvergiert, falls die Bedingung (4) erfüllt ist, und die Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ konvergiert. Eigentlich haben wir jedoch nicht die Konvergenz der Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ vorausgesetzt, sondern nur, daß die obere Grenze A der absoluten Beträge dieser Reihenglieder eine *endliche* Zahl ist.

Nehmen wir nun weiter an, daß die Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ *nicht* konvergiert, so kann die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ für $|x|>|\varrho|$ nicht bloß nicht, selbst nur bedingt, konvergieren, sondern ihre Glieder können nicht sämtlich *endlich* sein; denn wäre dies der Fall, so müßte die Reihe $\mathfrak{P}(\varrho)$ unbedingt und gleichmäßig konvergieren.

Hiermit ist unser Satz aber vollkommen bewiesen.

Eine Potenzreihe kann also nur höchstens auf einer Linie, der Peripherie des Konvergenzkreises, konvergieren ohne absolut konvergent zu sein; setzt man für die Punkte dieser Peripherie $x = R \cdot e^{i\theta}$, so erhält man

$$(5) \qquad \mathfrak{P}(Re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n R^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

und unsere Potenzreihe ist demnach in eine trigonometrische Reihe verwandelt worden.

Das Verhalten der Reihe (5) bietet daher so überaus große Schwierigkeiten dar, die man noch keineswegs zu überwinden vermocht hat; namentlich Pringsheim[1]) hat wichtige Untersuchungen über diese schwierige Frage angestellt.

Beispiel 1. Die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ oszilliert zwischen endlichen Grenzen überall auf der Peripherie seines Konvergenzkreises, außer im Punkte $x = 1$, wo die Reihe divergiert.

Beispiel 2. Die Reihe $\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$ mit dem Konvergenzradius 1 konvergiert unbedingt und gleichmäßig auf der ganzen Peripherie seines Konvergenzkreises.

Beispiel 3. Die Reihe $\frac{x^n}{1} + \frac{x^{2n}}{2} + \frac{x^{3n}}{3} + \cdots$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, ist bedingt konvergent auf der Peripherie seines Konvergenzkreises, außer in den Punkten $x = e^{\frac{2p\pi i}{n}}$, wo die Reihe divergiert.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 25, p. 419—426; 1885. Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 25, p. 337—364; 1895 Bd. 30, p. 37—100; 1900, Bd. 31, p. 505—524; 1901.

Beispiel 4. Ist die Zahlenfolge $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ monoton abnehmend mit dem Grenzwerte Null, so konvergiert die Reihe $\Sigma a_n x^n$ überall auf der Peripherie ihres Konvergenzkreises außer vielleicht für $x = +1$. Man erhält offenbar einen allgemeineren Satz unter Anwendung von § 85, II.

Beispiel 5. Die Reihen, die wir als Definitionen der Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ gewählt haben, sind beständig konvergente Potenzreihen.

Beispiel 6. Konvergiert das Produkt $\Pi(1 + |u_n|)$, so kann das andere Produkt mit veränderlichen Faktoren $\Pi(1 + u_n x)$ in eine beständig konvergente Potenzreihe verwandelt werden.

§ 89. Satz von Abel.

Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_n x^n$ in einem Punkte ω der Peripherie ihres Konvergenzkreises konvergiert, wie verhält sich dann diese Reihensumme zu der im Innern des Konvergenzkreises in x stetige Funktion $\mathfrak{P}(x)$? Daß diese Frage nicht ohne weiteres beantwortet werden kann, liegt auf der Hand, wenn man bloß bemerkt, daß $\mathfrak{P}(x)$ im Innern des Konvergenzkreises unbedingt, im Punkte ω aber vielleicht nur bedingt konvergiert.

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir den folgenden Satz von Abel, der später von Stolz verallgemeinert worden ist:

I. *Konvergiert die Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_n x^n$ *im Punkte* ω *der Peripherie ihres Konvergenzkreises, so stellt die Reihensumme* $\mathfrak{P}(\omega)$ *genau denjenigen Funktionenwert dar, welchem die stetige Funktion* $\mathfrak{P}(x)$ *zustrebt, wenn die Variable* x *vom Innern des Konvergenzkreises ausgehend in den Punkt* ω *ausrückt und zwar einem Wege folgend, der die untenstehende Bedingung* (10) *befriedigt.*

Ist r der Konvergenzradius, $\omega = re^{i\theta}$ der Punkt auf der Peripherie des Konvergenzkreises, und setzt man

$$(1) \qquad s_p = a_{n+1}\omega^{n+1} + a_{n+2}\omega^{n+2} + \cdots + a_{n+p}\omega^{n+p} = R_{n,p}(\omega),$$

so ist es, weil die Reihe $\mathfrak{P}(\omega)$ konvergiert, für eine vorgegebene, willkürlich kleine aber von Null verschiedene positive Größe ε möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n > N$ immer, für jedes p,

$$(2) \qquad |s_p| < \varepsilon$$

wird; aus (1) erhält man weiter

$$(3) \qquad a_{n+r}\omega^{n+r} = s_r - s_{r-1},$$

und das Restglied der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$

$$R_{n,p}(x) = \sum_{s=1}^{s=p} a_{n+s} x^{n+s} = \sum_{s=1}^{s=p} a_{n+s} \omega^{n+s} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+s} \tag{4}$$

kann demnach wegen (3) auch folgendermaßen geschrieben werden

$$R_{n,p}(x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1} \cdot \left(s_1 + (s_2 - s_1) \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right) + \cdots + (s_p - s_{p-1}) \left(\frac{x}{\omega}\right)^{p-1}\right)$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$\left\{ \begin{aligned} R_{n,p}(x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) \left(s_1 + s_2 \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right) + \cdots + s_{p-1} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{p-2}\right) \\ + s_p \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+p}. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Setzt man demnach

$$\left|\frac{x}{\omega}\right| = \varrho, \quad 1 - \frac{x}{\omega} = \frac{\omega - x}{\omega} = \alpha(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{6}$$

so ist $\varrho < 1$, während φ den Winkel zwischen der geraden Linie $x\omega$ und dem durch ω gehenden Radius des Konvergenzkreises bezeichnet; aus (6) erhält man unmittelbar

$$\frac{x}{\omega} = 1 - \alpha \cos\varphi - i\alpha \sin\varphi, \ \varrho^2 = 1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2, \tag{7}$$

woraus wegen (2) und (5) folgt:

$$|R_{n,p}(x)| < \varrho^{n+1}(1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{p-2})\alpha\varepsilon + \varepsilon \cdot \varrho^{n+p}$$

oder nach Summation der geometrischen Reihe, indem $\varrho < 1$ ist

$$|R_{n,p}(x)| < \frac{1 - \varrho^{p-1}}{1 - \varrho} \cdot \alpha\varepsilon + \varepsilon < \left(\frac{\alpha}{1 - \varrho} + 1\right) \cdot \varepsilon. \tag{8}$$

Aus der letzten Gleichung (7) erhält man nun weiter

$$\frac{\alpha}{1 - \varrho} = \frac{1 + \varrho}{2\cos\varphi - \alpha}; \tag{9}$$

der Quotient $\alpha : (1 - \varrho)$ kann somit niemals unendlich groß werden, wenn α seinem Grenzwerte Null zustrebt, wenn nur

$$\liminf |\cos\varphi| > 0$$

ist, oder was offenbar dasselbe ist

$$\limsup |\varphi| < \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Ist diese Bedingung (10) erfüllt, so hat man wegen (8)

$$|R_{n,p}(x)| < \varepsilon(K + 1), \tag{11}$$

wo K eine endliche positive Zahl bedeutet.

Da die in $R_{n,p}(x)$ vorkommende ganze Zahl n als endlich anzu-

sehen ist, so kann man auch eine solche von Null verschiedene positive Größe σ bestimmen, daß für $|\omega - x| < \sigma$ immer

$$\left| \sum_{s=0}^{s=n} a_s \omega^s - \sum_{s=0}^{s=n} a_s x^s \right| < \varepsilon \tag{12}$$

wird. Da nun offenbar

$$\mathfrak{P}(\omega) - \mathfrak{P}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} a_s \omega^s - \sum_{s=0}^{s=n} a_s x^s + R_{n,p}(\omega) - R_{n,p}(x),$$

also auch

$$|\mathfrak{P}(\omega) - \mathfrak{P}(x)| \leqq \left| \sum_{s=0}^{s=n} a_s \omega^s - \sum_{s=0}^{s=n} a_s x^s \right| + |R_{n,p}(\omega)| + |R_{n,p}(x)|$$

sein muß, so hat man offenbar wegen (2), (11) und (12) für $\omega - x| < \sigma$ immer

$$|\mathfrak{P}(\omega) - \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon(K + 3),$$

und damit ist unser Satz bewiesen.

Den obenstehenden Beweis verdankt man Stolz[1]); er hat jedoch den Satz nicht ganz genau formuliert, indem er fordert, daß diejenige Kurve, welcher x folgt um in den Punkt ω einzurücken, in diesem Punkte den Konvergenzkreis nicht berühren darf; diese Bedingung ist aus zwei Gründen unzulässig: 1. x kann dann keiner Kurve folgen, die in ω eine bestimmte Tangente nicht besitzt; 2. die Bedingung (10) braucht nicht erfüllt zu sein, wenn die obengenannte Kurve den Konvergenzkreis im Punkte ω nicht berührt.

Die Bedingung (10) tritt deutlich in einem von Pringsheim[2]) gegebenen Beweis unseres Satzes hervor; diese Bedingung sagt also aus, daß, wenn der Weg für x vorgeschrieben ist, es möglich sein muß, zwei kleine Sehnen durch ω zu ziehen, so daß der Weg in dem von diesen Sehnen gebildeten stumpfen Winkel vollständig gelegen ist.

Abel[3]) bewies nur denjenigen Spezialfall des Satzes I, in welchem x dem durch ω gehenden Radius des Konvergenzkreises folgt. Dieser Spezialfall ist später in anderer Weise von Dirichlet[4]) bewiesen worden.

1) Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 20, p. 370; 1875, Bd. 29, p. 127; 1884. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik Bd. II, p. 137.

2) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 27, p. 347 ff. 1897.

3) Journal für Mathematik Bd. I; 1826. Œuvres Bd. I, p. 229.

4) Journal de Mathématiques (2) Bd. 7, p. 253—255; 1863. Werke Bd. II, p. 303—306.

§ 90. Satz von Frobenius.

Die erste Anwendung des Begriffes Summierbarkeit einer Reihe die wir überhaupt kennen, rührt von Frobenius[1]) her und gibt eine interessante Verallgemeinerung des soeben bewiesenen Abelschen Satzes; wir wollen hier den Satz von Frobenius in ähnlicher Weise verallgemeinern, wie es Stolz mit dem Abelschen getan hat:

I. *Wenn die Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_n x^n$ *für* $x = \omega$ *zwar nicht konvergiert, sondern summierbar mit der Mittelsumme* s *ist, so hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius* $|\omega|$, *und die Mittelsumme* s *stellt denjenigen Funktionenwert dar, welchem* $\mathfrak{P}(x)$ *zustrebt, wenn die Variabele* x *vom Innern des Konvergenzkreises ausgehend in den Punkt* ω *einrückt und zwar einem Wege folgend, der die Bedingung* § 89, (10) *befriedigt.*

Setzt man der Kürze halber

$$s_{n-1} = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}, \tag{1}$$

und bezeichnet ε eine vorgegebene willkürlich kleine von Null verschiedene positive Größe, so ist es möglich eine solche positive ganze Zahl n zu bestimmen, daß, wenn

$$\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n+k-1}}{n+k} = s + r_k \tag{2}$$

gesetzt wird, für $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ immer

$$|r_k < \varepsilon \tag{3}$$

wird. Aus (2) erhält man weiter ohne Mühe

$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n+k-1} = (n+k)s + (n+k)r_k$$
$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n+k} = (n+k+1)\,s + (n+k+1)r_{k+1}$$

und somit durch Subtraktion

$$s_{n+k} = s + (n+k+1)r_{k+1} - (n+k)r_k; \tag{4}$$

in ganz ähnlicher Weise erhält man

$$s_{n+k-1} = s + (n+k)r_k - (n+k-1)r_{k-1},$$

woraus wegen (1) und (4) folgt:

$$a_{n+k}\omega^{n+k} = (n+k+1)r_{k+1} - 2(n+k)r_k + (n+k-1)r_{k-1}. \tag{5}$$

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \omega^n \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^n$$

1) Journal für Mathematik Bd. 89, p. 262—264; 1880.

muß daher dem Konvergenzsatze § 36, I zufolge für $|x| < |\omega|$ konvergieren; da aber $\mathfrak{P}(\omega)$ *nicht* konvergiert, so kann $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| > |\omega$ auch nicht diese Eigenschaft besitzen; der Konvergenzradius unserer Potenzreihe ist demnach genau gleich $|\omega|$.

Aus (1) findet man nun identisch

$$\sum_{p=0}^{p=n+k} a_p x^p = s_n - \sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega^p + \sum_{p=0}^{p=n} a_p x^p + \sum_{p=1}^{p=k} a_{n+p} x^{n+p},$$

woraus unter Anwendung von (4) und (5) hervorgeht:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n+k} a_p x^k = s + (n+1) r_1 - n r_0 + \sum_{p=0}^{p=n} a_p (x^p - \omega^p) + \\ \displaystyle + \sum_{p=1}^{p=k} [(n+p+1) r_{p+1} - 2(n+p) r_p + (n+p-1) r_{p-1}] \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+p}. \end{cases}$$

Sucht man demnach in der letzten Summe rechter Hand denjenigen Koeffizienten auf, mit welchem r_p multipliziert vorkommt, so findet man für $2 \leqq p \leqq k-1$ den Ausdruck

$$r_p (n+p) \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+p-1} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^2,$$

für $p = 0$, $p = 1$ bzw.

$$n r_0 \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1}, \qquad (n+1) r_1 \left(\frac{x}{\omega} - 2\right) \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1}$$

und für $p = k+1$, $p = k$ bzw.

$$(n+k+1) r_{k+1} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+k}, \qquad (n+k) r_k \left(1 - 2\frac{x}{\omega}\right) \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+k-1}.$$

Nach diesen Erörterungen finden wir demnach wegen (6) den neuen Ausdruck:

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n+k} a_p x^p = s + G(x) + \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^2 \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} \cdot \sum_{p=1}^{p=k} (n+p) r_p \left(\frac{x}{\omega}\right)^p + \\ \qquad + (n+k+1) r_{k+1} \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+k} - (n+k) r_k \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+k+1}, \end{cases}$$

wo der Kürze halber

$$(8)\quad G(x) = -\sum_{p=0}^{p=n} a_p (\omega^p - x^p) + (n+1) r_1 \left(1 - \left(\frac{x}{\omega}\right)^n\right) - n r_0 \left(1 - \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1}\right)$$

gesetzt worden ist.

Setzt man nun wie im vorhergehenden Paragraphen

$$\left|\frac{x}{\omega}\right| = \varrho, \qquad 1 - \frac{x}{\omega} = \alpha (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \frac{\omega - x}{\omega},$$

so ergibt sich für die Summe

$$(9) \qquad R_n(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^2 \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n+1} \cdot \sum_{p=1}^{p=k} (n+p)\, r_p \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^p$$

der Majorantwert

$$|R_n(x)| \leqq \alpha^2 \cdot \varrho^{n+1} \cdot \varepsilon \cdot \sum_{p=1}^{p=k} (n+p)\, \varrho^p < \alpha^2 \varepsilon (1 + 2\varrho + 3\varrho^2 + 4\varrho^3 + \cdots)$$

oder was offenbar dasselbe ist

$$(10) \qquad |R_n(x)| < \varepsilon \cdot \frac{\alpha^2}{(1-\varrho)^2} = \varepsilon \cdot \frac{(1+\varrho)^2}{(2\cos\varphi - \alpha)^2} < K \cdot \varepsilon,$$

wo K endlich bleibt, wie groß auch k angenommen wird.

Da n eine endliche Zahl ist, so leuchtet ein, daß man $\alpha = \left|1 - \frac{x}{\omega}\right|$ so klein wählen kann, daß auch

$$|G(x)| < \varepsilon$$

wird. Damit ist unser Satz aber bewiesen.

Hölder[1]) hat später eine ganze Reihe ähnlicher Sätze gegeben; von späteren Arbeiten auf diesem Gebiete erwähnen wir z. B. diejenigen von Knopp[2]).

180. Es ist der Satz von Frobenius auf die Reihe

$$1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + x^3\cos 3\varphi + \cdots$$

für $x = 1$ und $\varphi \neq 2p\pi$ anzuwenden.

§ 91. Rechnen mit Potenzreihen.

Aus den Sätzen über Addition und Subtraktion unendlicher Reihen ergibt sich unmittelbar der Satz:

I. *Die Summe einer begrenzten Zahl von Potenzreihen ist wieder eine Potenzreihe, und ihr Konvergenzradius ist mindestens dem kleinsten der ursprünglichen Konvergenzradien gleich.*

Wenn ein einziger der Konvergenzradien der gegebenen Potenzreihen *kleiner* als die übrigen ist, so ist er genau Konvergenzradius der Summe; sonst kann es aber wohl eintreffen, daß der Konvergenzradius der Summe größer wird als alle diejenigen der einzelnen Summanden; dies trifft z. B. für die Summe der beiden Potenzreihen

$$e^x - \frac{1}{1-x} = \left(\frac{1}{2!} - 1\right) x^2 + \left(\frac{1}{3!} - 1\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} - 1\right) x^4 + \cdots$$

ein.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

1) Mathematische Annalen Bd. 20, p. 535—549; 1882.

2) Doktordissertation Berlin 1907. Palermo Rendiconti Bd. 25; 1908.

In ganz ähnlicher Weise erhält man die Multiplikationsregel:

II. *Das Produkt einer begrenzten Zahl von Potenzreihen ist wieder eine Potenzreihe und ihr Konvergenzradius ist mindestens dem kleinsten der ursprünglichen Konvergenzradien gleich.*

Von den beiden Potenzreihen, die die Funktionen $\cos x \cdot (1-x)$ und $e^x \cdot (1-x)^{-1}$ darstellen, hat die erste den Konvergenzradius ∞, die zweite den Konvergenzradius 1; das Produkt ist aber eine beständig konvergente Potenzreihe.

Für die beiden Potenzreihen

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n$$

hat schon Cauchy[1]) die Produktreihe

$$(2) \qquad f(x)\, g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)\, x^n$$

angegeben; aus dieser Multiplikationsregel (2) hat Abel seinen in § 43 entwickelten Satz IV hergeleitet. Es seien nämlich die beiden Reihen Σa_n und Σb_n konvergent, dann ist dem Satze § 89, I zufolge

$$(3) \qquad f(1) = \Sigma a_n, \qquad g(1) = \Sigma b_n,$$

und die Produktreihe (2) ist sicher für $|x| < 1$ konvergent; konvergiert nun auch diese Reihe für $x = 1$, so ist ihre Summe genau $f(1)g(1)$, und damit ist der Satz bewiesen.

---

181. Für positive ganze n hat man das Produkt der beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s-1}{s} x^s, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

zu entwickeln und dadurch die Summe der ersten dieser Reihen zu bestimmen.

182. Es ist die Formel

$$\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n}\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{x^n}{n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

zu beweisen und zu diskutieren.

---

1) Analyse algébrique, p. 156; 1821.

§ 92. Über die Bestimmung des Konvergenzradius.

Da der Konvergenzradius einer Potenzreihe nur von den Koeffizienten der Reihe abhängt, so ist derselbe bestimmt, wenn diese Koeffizienten aufgegeben werden. Eine solche Bestimmung des Konvergenzradius von den Koeffizienten aus bietet aber so große Schwierigkeiten dar, daß wir diese Aufgabe noch keineswegs gelöst haben; ja wir dürfen wohl behaupten, daß wir noch nicht viel mehr wissen als Cauchy der die ersten Regeln zur Bestimmung des Konvergenzradius einer vorgelegten Potenzreihe angegeben hat.

Wir haben hier die beiden von Cauchy gegebenen Sätze in verallgemeinerter Form darzustellen:

I. *Ist* λ lim sup *der unendlichen Zahlenfolge*

$$a_1 , \sqrt{a_2} , \sqrt[3]{a_3} , \cdots , \sqrt[n]{a_n} , \cdots , \tag{1}$$

so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2}$$

gleich $1 : \lambda$.

Setzt man $|x| < 1$ voraus, so kann man $|x| \leqq 1 : (\lambda + \delta)$ annehmen, indem δ eine willkürlich kleine von Null verschiedene positive Größe bezeichnet. Wählen wir demnach die andere positive Zahl δ, sodaß $0 < \delta_1 < \delta$ ist, so ist es dem Satze § 14, II zufolge möglich eine solche positive ganze Zahl N zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer

$$\sqrt[n]{a_n} < \lambda + \delta_1 \tag{3}$$

wird; dadurch erhält man aber für $n \geqq N$ immer

$$\sqrt[n]{a_n x^n} \leqq \frac{\lambda + \delta_1}{\lambda + \delta} < 1,$$

und unsere Potenzreihe (2) ist daher dem Satze § 36, III zufolge sicher für $|x| < 1 : \lambda$ konvergent.

Ist andererseits $|x| > 1 : \lambda$, so setze man $|x| \geqq 1 : (\lambda - \delta)$, wo δ dieselbe Bedeutung wie vorher hat; wählt man demnach δ_1 so, daß $0 < \delta_1 < \delta$, so hat man dem Satze § 14, II zufolge für unzählige n

$$\sqrt[n]{a_n} > \lambda - \delta_1;$$

dadurch erhält man aber

$$\sqrt[n]{a_n x^n} > \frac{\lambda - \delta_1}{\lambda - \delta} > 1;$$

unsere Potenzreihe (2) kann daher für $|x| > 1 : \lambda$ nicht konvergieren; denn unendlich viele ihrer Glieder wachsen ihren absoluten Beträgen nach über jede Grenze hinaus.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ hat daher den Konvergenzradius $1 : \lambda$.

Ist die Zahlenfolge (1) eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte λ, so hat die Potenzreihe (2) den Konvergenzradius $1 : \lambda$. In dieser spezielleren Form ist der Satz I von Cauchy[1]) gegeben worden.

II. *Bezeichnen L und l* lim sup *und* lim inf *der Zahlenfolge*

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \quad \left|\frac{a_3}{a_2}\right|, \cdots, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \cdots, \tag{4}$$

so kann der Konvergenzradius der Potenzreihe (2) *nicht größer als* $1 : l$ *und nicht kleiner als* $1 : L$ *sein.*

Mit denselben Bezeichnungen wie vorher nehmen wir erstens $|x| \leqq 1 : (L + \delta)$ an, und bestimmen wir die Zahl δ_1, so daß $0 < \delta_1 < \delta$ ist; dann hat man für $n \geqq N$ immer

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < L + \delta_1,$$

woraus

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x\right| < \frac{L + \delta_1}{L + \delta} < 1$$

hervorgeht, und die Potenzreihe (2) ist demnach für $x < 1 : L$ konvergent.

Nehmen wir andererseits $|x| > 1 : (l - \delta)$ an, und ist $0 < \delta_1 < \delta$, so hat man für $n \geqq N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > l - \delta_1,$$

und also ist auch

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x\right| > \frac{l - \delta_1}{l - \delta} > 1,$$

so daß die Potenzreihe (2) niemals für $|x| > 1 : l$ konvergieren kann.

Der Satz II ist nicht von demselben Wert wie I, weil er keine Bestimmung des Konvergenzradius liefert außer wenn $L = l$, also wenn die Zahlenfolge (4) eine Fundamentalreihe ist oder eigentlich divergiert; in diesem Falle haben wir speziell:

III. *Ist die Zahlenfolge* (4) *eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerte λ, so hat die Potenzreihe* (2) *den Konvergenzradius* $1 : \lambda$.

Dieser Satz rührt von Cauchy[2]) her, während man Pincherle[3]) den allgemeineren Satz II verdankt.

1) Analyse algébrique, p. p. 143, 152; 1821.
2) Analyse algébrique, p. 152; 1821.
3) Lezioni sulla teoria della funzioni analitiche. Bologna 1899—1900.

Sind die beiden Zahlenfolgen (1) und (4) Fundamentalreihen, so müssen sie den Sätzen I und III zufolge denselben Grenzwert haben; diese Tatsache ist in der Cauchyschen Formel § 19, (13) enthalten, wenn man nur dort

$$b_n = c^{1:n}$$

einsetzt.

Wir bemerken aber ausdrücklich, daß die Zahlenfolge (1) sehr wohl konvergieren kann ohne daß dies mit (4) der Fall ist, während (1) immer konvergieren muß, wenn (4) diese Eigenschaft besitzt.

Bedeutet z. B. $\delta(n)$ die Anzahl der Divisoren in ω, so ist $\delta(n) = 2$, wenn n eine Primzahl bezeichnet; in diesem Falle ist

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\delta(n)} = 1,$$

während das Verhalten der entsprechenden Zahlenfolge (4) ganz unbekannt ist; weil die Anzahl der Primzahlen unendlich groß, kann $\delta(n)$ für beliebig große n den Wert 2 annehmen, für die Nachbarwerte aber vielleicht beliebig groß werden.

183. Man hat den Konvergenzradius der Potenzreihe $\Sigma \frac{x^n}{n^{\log n}}$ zu bestimmen.

184. Es ist der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

zu beweisen.

Kapitel XXII.

Dirichletsche Reihen und Fakultätenreihen.

§ 93. Folgerungen aus den Sätzen von Abel, du Bois Reymond und Dedekind.

Um gewisse andere Reihenformen mit veränderlichen Gliedern zu untersuchen haben wir vor allem einige Anwendungen der in den §§ 15, 39 gegebenen Sätze zu entwickeln.

Aus den Abelschen Sätzen § 15, I, II erhalten wir den folgenden:

I. *Wenn die Zahlenfolge* $a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n \cdots$ *eine monotone Fundamentalreihe ist, wenn außerdem die Reihe* $\Sigma f_n(x)$ *gleichmäßig konvergiert, indem* x *ein Kontinuum* K *durchläuft, so ist die Reihe* $\Sigma a_n f_n(x)$ *ebenfalls in* K *gleichmäßig konvergent.*

Wir können uns offenbar auf denjenigen Fall beschränken, wo

die a_n positiv sind; denn sonst hätten ja die $-a_n$ diese Eigenschaft; setzen wir nun für $p = 1, 2, 3, 4, \cdots$

$$s_p = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x) = A_p + i\,B_p,$$

wo A_p und B_p reell sind, so ist s_p das Restglied der gegebenen Reihe $\Sigma f_n(x)$; es sei nun die gegebene Zahlenfolge monoton abnehmend, G_n' und g_n' obere und untere Grenze der A_p, G_n'' und g_n'' obere und untere Grenze der B_p, indem x das Kontinuum durchläuft; dann ergibt sich wegen § 15, (5), indem noch für jedes m

gesetzt worden ist, $$f_m(x) = \alpha_m + i\,\beta_m$$

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{n+1}\,g_n' \leqq a_{n+1}\,\alpha_{n+1} + a_{n+2}\,\alpha_{n+2} + \cdots \leqq a_{n+1}\,G_n' \\ a_{n+1}\,g_n'' \leqq a_{n+1}\,\beta_{n+1} + a_{n+2}\,\beta_{n+2} + \cdots \leqq a_{n+1}\,G_n'', \end{cases}$$

und damit ist unser Satz bewiesen, weil G_n' und G_n'' gleichmäßig gegen Null konvergieren, wenn n ohne Grenze wächst, und x das Kontinuum K durchläuft; denn das Restglied der Reihe $\Sigma a_n f_n(x)$ ist ja

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} a_{n+p}(\alpha_{n+p} + i\,\beta_{n+p}).$$

Ganz in derselben Weise wird der andere Fall, wo die a_n monoton wachsen, unter Zuhilfenahme von § 15, (8) behandelt.

Aus § 39, I ergibt sich der folgende Satz:

II. *Wenn die Reihe mit konstanten Gliedern Σa_n konvergiert, wenn die Reihe mit positiven Gliedern $\Sigma\,|f_n(x) - f_{n+1}(x)|$ gleichmäßig konvergiert, indem x ein Kontinuum K durchläuft, und wenn schließlich $f_0(x)$ endlich und bestimmt ist in diesem Kontinuum, so ist die Reihe $\Sigma a_n f_n(x)$ auch in K gleichmäßig konvergent.*

Setzt man in der Tat für jedes m

$$s_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

so hat man für das Restglied $R_{n,p}$ der Reihe $\Sigma a_n f_n(x)$ wegen § 39, (2) den Ausdruck

$$(2)\quad R_{n,p} = (s_{n+p} f_{n+p}(x) - s_n f_{n+1}(x)) + \sum_{q=1}^{q=p-1} s_{n+q}\big(f_{n+q}(x) - f_{n+q+1}(x)\big).$$

Es sei nun A obere Grenze der positiven Zahlenfolge

$$|s_0|,\quad |s_1|,\quad |s_2|,\quad \ldots,\quad |s_n|,\quad \ldots,$$

dann ergibt sich

$$(3)\quad R_1 = \Big|\sum_{q=1}^{q=p-1} s_{n+q}(f_{n+q} - f_{n+q+1}(x))\Big| \leqq A \cdot \sum_{q=1}^{q=p-1} |f_{n+q}(x) - f_{n+q+1}(x)|:$$

aus den Voraussetzungen folgt dann unmittelbar, daß es möglich ist, eine solche positive ganze Zahl N_1 zu bestimmen, daß für $n \geq N_1$ immer

$$R_1 < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

wird. Aus der Identität

$$\sum_{p=0}^{p=n}(f_p - f_{p+1}(x)) = f_0(x) - f_{n+1}(x)$$

und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\Sigma\, f_n(x) - f_{n+1}(x)$ schließt man, daß die Zahlenfolge

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

eine im Kontinuum K gleichmäßig konvergente Fundamentalreihe sein muß. Weiter hat man identisch

$$s_{n+p}f_{n+p}(x) - s_n f_{n+1}(x) = (s_{n+p} - s_n)f_{n+p}(x) + s_n(f_{n+p}(x) - f_{n+1}(x)); \tag{5}$$

bedeutet daher G obere Grenze sämtlicher Zahlen $|f_m(x)|$, indem x das Kontinuum K durchläuft, so hat man immer

$$|(s_{n+p} - s_{n+1})f_{n+p}(x)| \leq G \cdot |s_{n+p} - s_{n+1}|,$$

und es ist demnach möglich eine solche positive ganze Zahl N_2 zu bestimmen, daß für $n \geq N_2$ immer

$$|(s_{n+p} - s_n)f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

wird, welchen Wert von x im Kontinuum K man auch einsetzt.

Endlich hat man, der Definition der Zahl A zufolge

$$|s_n(f_{n+p}(x) - f_{n+1}(x))| \leq A \cdot |f_{n+p}(x) - f_{n+1}(x)|,$$

und es ist demnach möglich die positive ganze Zahl N_3 so zu bestimmen, daß für $n \geq N_3$ immer

$$|s_n(f_{n+p}(x) - f_{n+1}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, indem x das Kontinuum K durchläuft.

Bedeutet nun N die größte der drei Zahlen N_1, N_2 und N_3, so ist demnach für $n \geq N$ immer

$$|R_{n,p}| < \varepsilon,$$

indem x das Kontinuum K durchläuft.

185. In wieweit gilt der Satz § 93, II, wenn die a_n auch im Kontinuum K Funktionen von x sind?

§ 94. Anwendungen auf gewisse speziellere Funktionentypen.

Setzt man in § 93, II $f_0(x) = 1$ und allgemein für $n \geqq 1$

$$f_n(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

so ergibt eine einfache Ausrechnung

$$(1) \qquad f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{x-\alpha} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)};$$

ist nun $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $x = u + iv$, und $u \geqq \alpha' + \delta$, wo δ eine willkürlich kleine, aber von Null verschiedene positive Größe ist, so hat man erstens für positive ganze $p > -u$ die Ungleichung

$$|x+p| \geqq |u+p| \geqq |\alpha' + \delta + p|$$

und unter Zuhilfnahme der Zahlenfolge § 84, (2)

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\alpha'(\alpha'+1)\cdots(\alpha'+n-1)} = \frac{\Gamma_n(\alpha')}{\Gamma_n(\alpha)} \cdot n^{i\alpha''},$$

woraus wegen (1) hervorgeht:

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{x-\alpha} \cdot \frac{\alpha'(\alpha'+1)\cdots(\alpha'+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{\Gamma_n(\alpha')}{\Gamma_n(\alpha)} \cdot n^{i\alpha''},$$

und somit erhält man, indem k endlich ist:

$$(2) \quad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \frac{k}{\delta} \cdot \frac{\alpha'(\alpha'+1)\cdots(\alpha'+n-1)}{(\alpha'+\delta)(\alpha'+\delta+1)\cdots(\alpha'+\delta+n)} \cdot \frac{\Gamma_n(\alpha')}{\Gamma_n(\alpha)};$$

nun ist aber auch

$$\frac{\alpha'(\alpha'+1)\cdots(\alpha'+n-1)}{(\alpha'+\delta)(\alpha'+\delta+1)\cdots(\alpha'+\delta+n)} = \frac{\Gamma_n(\alpha'+\delta)}{\Gamma_n(\alpha')} \cdot \frac{n}{n+\delta+\alpha'} \cdot \frac{k}{n^{1+\delta}},$$

woraus schließlich wegen (2) folgt:

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \frac{K_n}{n^{1+\delta}},$$

wo obere Grenze der K_n endlich ist; damit haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

I. *Konvergiert die Reihe Σa_n, und ist α eine willkürliche endliche Zahl, die weder Null noch negativ ganz ist, so ist die Reihe*

$$(3) \qquad a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

gleichmäßig konvergent, wenn $\Re(x-\alpha) > 0$ ist, und x weder Null noch negativ ganz angenommen wird.

Ganz in derselben Weise finden wir den analogen Satz:

II. *Konvergiert die Reihe* Σa_n, *und ist* α *eine willkürliche endliche Zahl, die jedoch weder Null noch negativ ganz sein darf, so konvergiert die Reihe*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cdot \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \tag{4}$$

gleichmäßig für alle endlichen x, *die der Bedingung* $\Re(x-\alpha) < 0$ *genügen.*

In diesem Zusammenhang haben wir noch teilweise nach Jensen[1]) den folgenden speziellen Satz zu beweisen:

III. *Konvergiert die Reihe* Σa_n, *und bezeichnet*

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \ldots \tag{5}$$

eine monoton wachsende divergente Zahlenfolge mit positiven Elementen, so konvergiert die Reihe

$$\frac{a_0}{\lambda_0^x} + \frac{a_1}{\lambda_1^x} + \frac{a_2}{\lambda_2^x} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda_n^x} + \cdots \tag{6}$$

gleichmäßig für alle endlichen x, *die der Bedingung* $\Re(x) > 0$ *genügen.*

Setzt man in der Tat $x = \alpha + i\beta$ und

$$u_n = \frac{1}{\lambda_n^\alpha} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^\alpha}, \quad v_n = \frac{1}{\lambda_n^{\alpha+i\beta}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\alpha+i\beta}},$$

so hat man für jedes n

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} u_n = \frac{1}{\lambda_0^\alpha} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^\alpha}, \qquad \sum_{p=0}^{p=n-1} v_n = \frac{1}{\lambda_0^{\alpha+i\beta}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\alpha+i\beta}},$$

und die beiden unendlichen Reihen Σu_n und Σv_n, von welchen die erste für $\alpha > 0$ *positive* Glieder hat, sind somit für $\alpha > 0$ konvergent.

Weiter hat man

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\lambda_n^{-\alpha-i\beta} - \lambda_{n+1}^{-\alpha-i\beta}}{\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}} = \lambda_n^{-i\beta} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda_n+1}{\lambda_n}\right)^{-\alpha-i\beta}}{1 - \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^{-\alpha}};$$

setzt man nun der Kürze halber

$$\log \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \varrho_n, \qquad \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^{-k} = e^{-k\varrho_n},$$

so hat man demnach auch

$$\frac{v_n}{u_n} = \lambda_n^{-i\beta} \frac{1 - e^{-\varrho_n(\alpha+i\beta)}}{1 - e^{-\varrho_n\alpha}} = \lambda_n^{-i\beta} \left(1 + \frac{e^{-\varrho_n\alpha} - e^{-\varrho_n(\alpha+i\beta)}}{1 - e^{-\varrho_n\alpha}}\right),$$

1) Tidsskrift for Mathematik (5) Bd. 2, p. 70; 1884.

woraus, falls α und ϱ_n beide positiv sind, folgt:

$$\left|\frac{v_n}{u_n}\right| \leqq 1 + \frac{|1 - e^{-i\varrho_n\beta}|}{e^{\varrho_n\alpha} - 1} < 1 + \frac{|1 - e^{-i\varrho_n\beta}|}{\varrho_n}. \tag{7}$$

Es ist nun

$$1 - e^{-i\beta\varrho_n} = 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\varrho_n \cdot (\sin\tfrac{1}{2}\varrho_n\beta - i\cos\tfrac{1}{2}\varrho_n\beta),$$

und, da β und ϱ_n reell sind,

$$|1 - e^{-i\beta\varrho_n}| = |2\sin\tfrac{1}{2}\beta\varrho_n| \leqq \varrho_n \cdot |\beta|;$$

dadurch ergibt sich aber wegen (7)

$$|v_n| < \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) u_n. \tag{8}$$

Aus der Ungleichung (8) kann man aber noch wichtigere Resultate herleiten; erinnert man sich nämlich an die Gleichung $x = \alpha + i\beta$, und bezeichnet b die obere Grenze von $|\beta|$, a die untere Grenze der positiven Zahlen α, so hat man wegen (8) für jedes n

$$\left|\sum_{p=n+1}^{p=\infty} v_p\right| \leq \sum_{p=n+1}^{p=\infty} |v_p| < \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \sum_{p=n+1}^{p=\infty} u_p;$$

es ist aber

$$\sum_{p=n+1}^{p=\infty} u_p = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\alpha}} \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^{a}},$$

und somit erhalten wir schließlich

$$\left|\sum_{p=n+1}^{p=\infty} v_p\right| \leq \sum_{p=n+1}^{p=\infty} |v_p| < \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{n+1}^{a}}, \tag{9}$$

womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

---

186. Man hat die Entwicklung von Nicole[1]) und Stirling[2])

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

herzuleiten, und zu beweisen, daß die Reihe rechter Hand für $\Re(x - \alpha) > 0$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert.

1) Histoire de l'Académie (Paris) 1727, p. 257—268.
2) Methodus differentialis. London 1730.

187. Es sind die beiden Formeln

$$\frac{1}{x+n} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p\, p!}{x(x+1)\cdots(x+p)} \cdot \binom{n}{p},$$

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p}{x+p} \cdot \binom{n}{p},$$

wo n positiv ganz ist, zu beweisen.

188. Durch Transformation der einzelnen Glieder unter Zuhilfenahme der beiden, in der vorhergehenden Aufgabe entwickelten Formeln hat man zu untersuchen, ob man die eine der beiden in Aufgabe 122 betrachteten unendlichen Reihen in ganz formaler Weise aus der anderen herleiten kann.

§ 95. Dirichletsche Reihen. Satz von Jensen.

Wenn die Koeffizienten a_n sämtlich von x unabhängig sind, und wenn die Zahlenfolge mit positiven Elementen

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots \tag{1}$$

monoton wachsend und divergent ist, so nennen wir die unendliche Reihe

$$D(x) = \frac{a_0}{\lambda_0^x} + \frac{a_1}{\lambda_1^x} + \frac{a_2}{\lambda_2^x} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda_n^x} + \cdots \tag{2}$$

eine Dirichletsche Reihe; über diese Reihenform gilt der Satz:

I. *Der Konvergenzbereich der Dirichletschen Reihe $D(x)$ ist der endliche Teil einer durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda$, wo λ eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmten Halbebene. In diesem Bereiche konvergiert die Reihe stets gleichmäßig.*

Ist in der Tat $D(\alpha)$, wo α eine endliche Zahl bedeutet, konvergent, und nimmt man $\Re(x-\alpha) > 0$ an, so hat man wegen (2)

$$D(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda_n^{x-\alpha}}, \tag{3}$$

und unser Satz ist demnach eine unmittelbare Folge von § 94, III.

Ist $\lambda = -\infty$, so heißt die Reihe $D(x)$ beständig konvergent, ist andererseits $\lambda = +\infty$, so konvergiert unsere Reihe überhaupt nicht für endliche x.

Der Satz I (ohne die Gleichmäßigkeit der Konvergenz) rührt

von Jensen[1]) her, ist aber erst viel später durch eine Arbeit von Cahen[2]), der ihn wiedergefunden hat, allgemein bekannt geworden.

Über die allgemeine Reihe (2) hat Jensen[3]) noch den folgenden Satz gefunden:

II. *Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe $D(x)$ ist der endliche Teil einer durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda'$, wo λ' eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmten Halbebene.*

Ist α wie vorher eine endliche Zahl, und ist $D(\alpha)$ unbedingt konvergent, so hat man für $\Re(x-\alpha) = p > 0$

$$\left|\frac{a_n}{\lambda_n^x}\right| = \left|\frac{a_n}{\lambda_n^\alpha}\right| \cdot \frac{1}{\lambda_n^p},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Beispiel 1. Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^x} \tag{4}$$

konvergiert für $\Re(x) > 0$ und zwar immer *bedingt*; es ist demnach für diese Reihe $\lambda = 0$, $\lambda' = +\infty$.

Setzt man in (2) $a_0 = 0$ und $\lambda_n = n$, so entsteht die zuerst, und zwar von Dedekind[3]) betrachtete Dirichletsche Reihe

$$\mathfrak{D}(x) = \frac{a_1}{1^x} + \frac{a_2}{2^x} + \frac{a_2}{3^x} + \cdots + \frac{a_n}{n^x} + \cdots; \tag{5}$$

über diese speziellere Reihe gilt der Satz:

III. *Die Breite des Streifens der bedingten Konvergenz kann für eine Reihe $\mathfrak{D}(x)$ niemals die Einheit übersteigen, es ist demnach für diese Reihe stets*

$$\lambda' - \lambda \leqq 1. \tag{6}$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem anderen, der einleuchtend ist:

IV. *Ist α eine endliche Zahl, und sind sämtliche Glieder der Reihe $\mathfrak{D}(\alpha)$ endlich, so ist die Reihe $\mathfrak{D}(x)$ sicher unbedingt konvergent für $\Re(x-\alpha) > 1$.*

Beispiel II. Für die Reihe, die Riemannsche Zetafunktion,

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots \tag{7}$$

1) Tidsskrift for Mathematik (5), Bd. 2, p. 70; 1884.
2) Annales de l'Ecole Normale (3), Bd. 11, p. 85; 1894.
3) In Dirichlet: Vorlesungen über Zahlentheorie.

hat man $\lambda = \lambda' = 1$; diese Reihe kann demnach niemals bedingt konvergieren; denn sie konvergiert nicht für $x = 1 + i\beta$.

Beispiel 3. Für die Reihe

$$\frac{1}{1^x} - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \cdots \tag{8}$$

hat man $\lambda = 0$, $\lambda' = 1$.

Bei der Beantwortung der Frage über Konvergenz oder Nichtkonvergenz einer vorgelegten Dirichletschen Reihe braucht man nur reelle Werte von x in Betracht zu ziehen.

Über Dirichletsche Reihen vergleiche man noch die Abhandlung von Pringsheim[1]).

---

189. Man hat die beiden Konvergenzbereiche derjenigen Reihe $\mathfrak{D}(x)$, für welche $a_n = (-1)^{n-1}$ ist, außer wenn n eine Quadratzahl ist — in diesem Falle hat man $a_n = 1$ — zu bestimmen.

§ 96. Fakultätenreihen.

Sind die Koeffizienten a_n sämtlich von x unabhängig, so heißt die unendliche Reihe

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{1}$$

eine *Fakultätenreihe erster Art*; eine solche Reihe kann die Eigentümlichkeit darbieten, daß sie überall in einem Bereiche, der die Werte $x = 0, -1, -2, \cdots$ einschließt, außer natürlich in diesen Punkten, konvergieren kann.

Der Konvergenzbereich der Reihe $\Omega(x)$ wird daher als derjenige Bereich aufgefaßt, in welchem diese andere Reihe

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, a_n}{\Gamma(x+n+1)} \tag{2}$$

konvergiert.

Schon Jensen[2]) hat bemerkt, daß diese Reihen den Dirichletschen sehr ähnlich sind, indem er die beiden folgenden Sätze (ohne die gleichmäßige Konvergenz) ausgesprochen hat.

I. *Der Konvergenzbereich der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ ist die unendliche, durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda$, wo λ eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmte Halbebene. In diesem Bereiche kon-*

1) Mathematische Annalen Bd. 37, p. 38—60; 1890.

2) Tidsskrift for Mathematik (5) Bd. 2, p. 71; 1884.

vergiert die Reihe stets gleichmäßig (außer in den eventuell dort gelegenen Punkte $x = 0, -1, -2, \cdots$).

II. *Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe $\Omega(x)$ ist die unendliche, durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda'$, wo λ' eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmte Halbebene.*

Ist α eine endliche Zahl, und konvergiert die Reihe $\Omega(\alpha)$, so hat man

$$(3) \qquad \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!\, a_n}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

und der Satz I ist eine unmittelbare Folge von § 94, I.

Um auch den Satz II zu beweisen, schreiben wir folgendermaßen die Formel (3):

$$(4) \qquad \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!\, a_n}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \cdot \frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_{n+1}(\alpha)} \cdot \frac{1}{n^{x-\alpha}};$$

ist nun $\Omega(\alpha)$ unbedingt konvergent, so hat die Reihe $\Omega(x)$ dieselbe Eigenschaft, wenn $\Re(x-\alpha) \geqq 0$ ist.

Jensen bemerkt noch, daß auch die Binomialkoeffizientenreihe oder die *Fakultätenreihe zweiter Art*

$$(5) \qquad \mathfrak{B}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \binom{x-1}{n} = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cdot \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

wo die Koeffizienten a_n sämtlich von x unabhängig sein sollen, den Dirichletschen Reihen ähnlich sind, indem er auch die beiden folgenden Sätze (ohne die Gleichmäßigkeit der Konvergenz) ausgesprochen hat:

III. *Der Konvergenzbereich der Binomialkoeffizientenreihe $\mathfrak{B}(x)$ ist der endliche Teil einer durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda$, wo λ eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmten Halbebene. In diesem Bereiche konvergiert die Reihe stets gleichmäßig.*

IV. *Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe $\mathfrak{B}(x)$ ist der endliche Teil einer durch eine Ungleichung von der Form $\Re(x) > \lambda'$, wo λ' eine reelle Zahl bezeichnet, bestimmten Halbebene.*

Ist α eine endliche Zahl, und konvergiert die Reihe $\mathfrak{B}(\alpha)$, so hat man

$$(6) \qquad a_n \cdot \binom{x-1}{n} = a_n \cdot \binom{\alpha-1}{n} \cdot \frac{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)},$$

und unser Satz III ist eine unmittelbare Folge von § 94, II.

Aus (6) findet man weiter

$$(7) \qquad a_n \cdot \binom{x-1}{n} = a_n \binom{\alpha-1}{n} \cdot \frac{\Gamma_n(1-\alpha)}{\Gamma_n(1-x)} \cdot \frac{1}{n^{x-\alpha}},$$

und damit ist auch der Satz IV bewiesen.

Die Analogie der Dirichletschen Reihen $\mathfrak{D}(x)$ und der beiden Arten von Fakultätenreihen $\mathfrak{Q}(x)$ und $\mathfrak{B}(x)$ kann noch viel weiter verfolgt werden; erstens beweisen wir die Sätze:

V. *Wenn α eine endliche Zahl bedeutet, und die Glieder der Reihe $\mathfrak{Q}(\alpha)$ bzw. $\mathfrak{B}(\alpha)$ sämtlich endlich sind, so konvergiert die Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ bzw. $\mathfrak{B}(x)$ sicher unbedingt, wenn $\Re(x-\alpha) > 1$ angenommen wird.*

VI. *Die Breite des Streifens der bedingten Konvergenz kann für eine Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ oder $\mathfrak{B}(x)$ niemals die Einheit übersteigen.*

Diese beiden Sätze sind unmittelbare Folgen der Formeln (4) und (7). Zweitens beweisen wir den folgenden Satz von Landau[1]):

VII. *Die beiden Reihen*

$$(8) \qquad \mathfrak{Q}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad \mathfrak{D}(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

sind gleichzeitig konvergent, und dasselbe gilt für das andere Reihenpaar

$$(9) \qquad \mathfrak{B}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \binom{x-1}{n}, \quad \mathfrak{D}_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}.$$

Wir haben nur diesen Satz für *reelle* x zu beweisen; in diesem Falle leuchtet ein, daß die Reihe $\mathfrak{D}(x)$ in (8) und diese andere

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_2(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{(n+1)^x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^x + a_0$$

gleichzeitig konvergieren; denn der von Null verschiedene und stets endliche Faktor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

ist monoton mit wachsendem n; weiter hat man

$$\mathfrak{Q}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{(n+1)^x} \cdot \Gamma_{n+1}(x),$$

und somit ergibt sich wegen § 84, IV, daß die Reihen $\mathfrak{Q}(x)$ und $\mathfrak{D}(x)$

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie Bd. 36, p. 157 ff. 1906. In dieser Abhandlung beweist Landau Verallgemeinerungen der oben gegebenen von Jensen ausgesprochenen Sätze.

gleichzeitig konvergieren müssen; denn der von Null verschiedene und stets endliche Faktor $\Gamma_n(x)$ bildet eine *monotone* Zahlenfolge.

In ähnlicher Weise findet man

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x} \cdot \frac{1}{\Gamma_n(1-x)},$$

woraus die gleichzeitige Konvergens der beiden Reihen $\mathfrak{B}(x)$ und $\mathfrak{D}_1(x)$ unmittelbar folgt.

190. Es sind die Koeffizienten der Reihe

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cdot \binom{x-1}{n}$$

zu bestimmen, wenn die Funktion $\mathfrak{B}(x)$ gegeben ist, und man weiß, daß diese Reihenentwicklung möglich ist und konvergiert für $\Re(x) \geqq 1$.

191. Man hat die für $\Re(x) > 1$ gültige Entwicklung

$$0 = 1 - \binom{x-1}{1} + \binom{x-1}{2} - \binom{x-1}{3} + \binom{x-1}{4} - \cdots$$

herzuleiten.

192. Unter welchen Bedingungen können zwei Fakultätenreihen erster Gattung dieselbe Funktion darstellen?

Anhang.

Weitere Übungsaufgaben.

193. Es ist zu beweisen, daß immer eine rationale Zahl zwischen zwei verschiedenen irrationalen gelegen ist.

194. Wie verhält sich die reelle Zahlenfolge $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, wenn ihre abgeleitete Menge endlich ist, und $\lim (a_n - a_{n+1}) = 0$ für $n = \infty$ ist?

195. Wenn die reelle Zahlenfolge $\delta_0 \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n \cdots$ die beiden Bedingungen

$$\limsup_{n=\infty} \delta_n < \infty, \quad \liminf_{n=\infty} \delta_n > 0$$

befriedigt, während die u_n sämtlich positiv sind, so sind die Reihen Σu_n und $\Sigma u_n \delta_n$ gleichzeitig entweder beide konvergent oder beide divergent.

196. In wie weit gilt der Satz der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Zahlenfolge $\delta_0 \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n \cdots$ komplex ist?

197. Wenn die Reihe mit reellen Gliedern Σu_n konvergiert, so hat man die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des unendlichen Produktes $\Pi (1 + u_n)$ anzugeben.

198. Ist α eine primitive Wurzel der Gleichung $\alpha^p = 1$, p positiv ganz, und setzt man $u_n = \alpha^n \cdot n^{-\omega}$, wo ω positiv ist, so konvergiert oder divergiert das unendliche Produkt $\Pi (1 + u_n)$, je nachdem $p\omega > 1$ oder $p\omega \leqq 1$ ist.

199. Wenn die unendliche Reihe Σa_n unbedingt konvergiert, und wenn $g \leqq |x \leqq G$, wo G endlich und $g > 0$ ist, vorausgesetzt wird, so ist das unendliche Produkt

$$\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{1 + x^{a_n}}$$

immer gleichmäßig und unbedingt konvergent, außer vielleicht für $x = 1$.

200. Es ist zu beweisen, daß der reguläre Kettenbruch $(a_0; a_1, a_2, \cdots)$, wo $a_0 = 1$ und für $n \geqq 1$ immer

$$a_n = \frac{3}{2\,(2^n - 1)}$$

gesetzt wird, in solcher Weise oszilliert, daß er nur zwei endliche Werte mit der Differenz $\frac{1}{4}$ annehmen kann.

201. Man hat den regulären Kettenbruch $(a_0; a_1, a_2, \cdots)$, wo $a_0 = 0$ und allgemein für positive ganze Stellenzeiger

$$a_{2n} = \frac{n+1}{n}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$$

ist, zu untersuchen.

202. Es ist zu beweisen, daß der unendliche Kettenbruch

$$K = \left(a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \cdots\right),$$

wo die a_n und b_n sämtlich positiv sind, immer konvergiert, wenn

$$\limsup_{n=\infty} \frac{b_n}{a_n} > 1, \quad \liminf_{n=\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) > 0$$

angenommen wird.

203. Sind die a_n und b_n sämtlich positiv, so konvergiert der Kettenbruch, wenn die obere Grenze der Zahlenfolge $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$ die Einheit nicht übersteigt, und wenn außerdem entweder die Zahlenfolge $a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n \cdots$ mit dem Grenzwerte 1 monoton abnimmt, oder wenn

$$\limsup_{n=\infty} a_n > 1$$

angenommen wird.

---

204. Wenn $\Sigma |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert, und wenn $\Sigma u_n(x)$ im Kontinuum K gleichmäßig konvergiert, so ist $\Sigma a_n u_n(x)$ auch in K gleichmäßig konvergent. Beispiele: Sätze § 39, I und § 93, I.

205. Wenn $\Sigma |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert, wenn $\lim a_n = 0$ für $n = \infty$ ist, und wenn außerdem $\Sigma u_n(x)$ stets zwischen endlichen Grenzen oszilliert, wenn x das Kontinuum K durchläuft, so ist $\Sigma a_n u_n(x)$ in K gleichmäßig konvergent. Beispiele: Satz von Malmstén § 85, I und Satz § 39, II.

206. Wenn Σa_n zwischen endlichen Grenzen oszilliert, und wenn, indem x das Kontinuum K durchläuft, $u_0(x)$ endlich und bestimmt, $\lim u_n(x) = 0$ für $n = \infty$ ist, und die Reihe $\Sigma |u_n(x) - u_{n+1}(x)|$ gleichmäßig konvergiert, so ist $\Sigma a_n u_n(x)$ auch in K gleichmäßig konvergent. Beispiel: Satz § 39, II.

---

207. Wenn Σa_n konvergiert, und wenn $\Sigma u_n(x)$ im Kontinuum K gleichmäßig konvergiert, so ist die entsprechende Cauchysche Produktreihe auch in K gleichmäßig konvergent.

208. Wir setzen die beiden Reihen $\Sigma a_n u_n(x)$ und $\Sigma b_n v_n(x)$ im Kontinuum K als konvergent voraus und bezeichnen für alle n durch g_n und g_n' obere Grenze in K von $|u_n(x)|$ und $|v_0(x)+v_1(x)+\cdots+v_n(x)|$; wenn dann die Reihe $\Sigma|b_n-b_{n+1}|$ konvergiert, wenn

$$\lim_{n=\infty}\sum_{p=0}^{p=n} a_p b_{n-p} = 0$$

ist, und wenn außerdem die oberen Grenzen G und G' der aus g_n und g_n' gebildeten Zahlenfolgen endlich sind, alsdann dürfen $\Sigma a_n u_n(x)$ und $\Sigma b_n v_n(x)$ überall in K nach der Cauchyschen Regel multipliziert werden. Beispiele: Sätze § 86, I, II.

209. Wenn mit den Voraussetzungen in der vorhergehenden Aufgabe die beiden zu multiplizierenden Reihen $\Sigma a_n u_n(x)$ und $\Sigma b_n v_n(x)$ in K gleichmäßig konvergieren, so ist die Produktreihe ebenfalls in K gleichmäßig konvergent.

---

210. Wenn α endlich ist, und die Dirichletsche Reihe $D(\alpha)$ oder die Fakultätenreihe $\Omega(\alpha)$ oder die Binomialkoeffizientenreihe $\mathfrak{B}(\alpha)$ zwischen endlichen Grenzen oszilliert, so konvergiert die entsprechende Reihe $D(x)$, $\Omega(x)$ oder $\mathfrak{B}(x)$, wenn nur $\Re(x-\alpha)>0$ vorausgesetzt wird.

Zusätze und Berichtigungen.

Seite 4, Formel (9) steht $n > \frac{(1-\varepsilon)\,b}{(1-b)\,\varepsilon}$ anstatt $n > \frac{(1-\varepsilon)\,a}{(1-a)\,\varepsilon}$.

Seite 12, § 5, I steht $h_{n+p} > h'_{n+p}$ anstatt $l_{n+p} > h'_{n+p}$.

Seite 51 unmittelbar nach Formel (4) steht $\left(\frac{x}{k+1}\right)^n$ anstatt $\left(\frac{|x|}{k+1}\right)^{n-k}$.

Seite 109. Die Herleitung der Formel (3) ist im Texte etwas zu kurz skizziert:

Setzt man

$$A_n = \frac{a_2 s_1 + (a_3 - a_2) s_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) s_{n-1}}{a_n},$$

so hat man der Identität $s_p - s_{p-1} = u_p$ wegen

$$A_n = \frac{a_2 u_2 + a_3 u_3 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1}}{a_n} + s_{n-1},$$

und demnach findet man

$$\frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n}{a_n} = A_n \quad s_{n-1} + u_n + \frac{a_1 u_1}{a_n},$$

woraus die Formel (3) unmittelbar hervorgeht.

Seite 172. Zur Formel (18): Setzt man $a_n = n$, wo n keine Quadratzahl sein darf, aber $a_{n^2} = n$, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = 1, \quad \limsup_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty, \quad \liminf_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Seite 272, § 92 Schluß; man vergleiche die vorhergehende Bemerkung.

Seite 275, Formel (2). Die im Texte nicht näher definierte Zahl k hat die folgende Bedeutung:

$$k = \frac{(\alpha' + \delta)(\alpha' + \delta + 1) \cdots (\alpha' + \delta + p - 1)}{x(x+1) \cdots (x+p-1)}.$$

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Nielsen, Dr. **Niels**, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. Geb. n. *M.* 14.—

Der erste Teil gibt, größtenteils nach früheren Arbeiten des Verfassers, die systematische Theorie der Zylinderfunktionen, welche als Lösungen zweier Fundamentalgleichungen definiert werden, und einiger allgemeineren Funktionen, die späterhin von großer Bedeutung werden. Außer den gewöhnlichen Zylinderfunktionen der ersten und zweiten Art $J^\nu(x)$ und $Y^\nu(x)$ werden noch zwei Funktionen der dritten Art, nämlich $H_1{}^\nu(x) = J^\nu(x) + i\,Y^\nu(x)$ und $H_2{}^\nu(x) = J^\nu(x) - i\,Y^\nu(x)$, eingeführt. — Der zweite Teil gibt eine neue, bisher noch nicht publizierte Theorie der bestimmten Integrale mit Zylinderfunktionen. Die altbekannten Resultate werden, nebst vielen anderen, durch allgemeine Methoden, in welchen die H-Funktionen eine wichtige Rolle spielen, hergeleitet. Zahlreiche asymptotische Reihen werden entwickelt; u. a. wird der merkwürdige Satz bewiesen, daß die Quadratsumme $(J^\nu(x))^2 + (Y^\nu(x))^2$ in der ganzen unendlichen x-Ebene, außer in $x = 0$, einen endlichen Wert hat; für $\nu = \pm\frac{1}{2}$ gewinnt man dadurch die altbekannte Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ als einfachsten Fall. — Der dritte Teil entwickelt, nach früheren Arbeiten des Verfassers, eine Theorie der Entwicklungen analytischer Funktionen in Reihen, die nach Zylinderfunktionen fortschreiten, d. h. Neumannsche und Kapteynsche Reihen und verschiedene andere. — Der vierte Teil behandelt die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Zylinderfunktionen, d. h. Reihen von Schlömilch und Fourier nach Dini und Integrale von Neumann und Hankel. Nach früheren Arbeiten des Verfassers wird hier gezeigt, daß die Schlömilchschen Reihen sämtlich Nullentwicklungen gestatten. — Der Theorie folgen ein Anhang mit Hilfsformeln und Zusätze und ein ausführliches Literaturverzeichnis über Theorie und Anwendungen der Zylinderfunktionen.

——— Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Dies Handbuch versucht eine Gesamtdarstellung der bis jetzt bekannten Eigenschaften und Anwendungen der Gammafunktion und verwandter Funktionen, in strenger und doch möglichst elementarer Form zu liefern.

Der erste Teil des Buches gibt, ohne Zuhilfenahme bestimmter Integrale, sondern ausschließlich durch Anwendung der Theorie analytischer Funktionen, eine elementare Entwicklung der Eigenschaften von $\Gamma(x)$ und verwandter Funktionen, indem $\Gamma(x)$ mittels seiner Differenzengleichung definiert wird.

Im zweiten Teile wird eine ziemlich vollständige Theorie der beiden Eulerschen Integrale und der durch Gammafunktionen ausdrückbaren bestimmten Integrale sowie ihrer Anwendung zur Herleitung der Reihen von Stirling, Kummer und Lerch gegeben; ebenso werden die beiden Mellinschen Umkehrprobleme und ihre Anwendung auf gewisse Funktionengattungen behandelt.

Der dritte und letzte Teil untersucht die reziproken Gammafunktionen als Entwicklungsfunktionen durch eine Darstellung der von Schlömilch, Jensen, Pincherle und vom Verfasser ausgebildeten Theorie der Fakultätenreihen; hier findet sich wohl zum ersten Male eine Würdigung der Methoden, die Stirling über solche Reihen angedeutet hat.

Das Buch enthält endlich ein möglichst vollständiges Verzeichnis der reichen Literatur über die behandelten Theorien.

——— Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M.* 3.60.

Das Buch versucht eine systematische Untersuchung des Integrallogarithmus, dem seit dem Erscheinen der Bücher von L. Mascheroni (1796) und J. Soldner (1809) des verflossenen Jahrhunderts wohl zahlreiche Abhandlungen, aber kein zusammenfassendes Buch gewidmet ist. Als Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Schlömilchsche Bemerkung genommen, daß der Integrallogarithmus und die Krampsche Transzendente als Spezialfälle in der später als Prymsche Q-Funktion bezeichneten Transzendenten enthalten sind. Es ist so gelungen, die schon bekannten, sowie verschiedene neue Eigenschaften des Integrallogarithmus in systematischer Weise herzuleiten.

Bachmann, Professor Dr. **Paul**, in Weimar, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. [X u. 151 S.] gr. 8. 1892. Geh. n. *M.* 4.—

Cesàro, Dr. **Ernesto**, weil. Professor an der Kgl. Universität Neapel, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Bonn. Mit 97 Figuren im Text. [IV u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 15.—

von Dantscher, Dr. Victor, Professor an der Universität Graz, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. [VI u. 79 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M* 2.80, in Leinwand geb. n. *M* 3.40.

Der Verfasser hat sich entschlossen, seine an der Grazer Universität wiederholt gehaltenen Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen zu veröffentlichen, um den Studierenden Gelegenheit zu geben, auch diese Theorie, die in den Lehrbüchern meist nur andeutungsweise berücksichtigt wird, genauer kennen zu lernen.

Das Fundament bildet die Lehre von den additiven Aggregaten aus unendlich vielen positiven rationalen Zahlen, deren Einführung durch das Verfahren der Wurzelausziehung nahe gelegt wird. Die Hauptrolle spielt dabei die Entwicklung der Gleichheitserklärung; aus ihr ergibt sich naturgemäß die Unterscheidung zwischen konvergenten und divergenten additiven Aggregaten; auf die ersteren werden die vier Rechnungsoperationen im Gebiete der rationalen Zahlen ausgedehnt und gezeigt, daß es konv.-addit. Aggregate gibt, deren *Rte* Potenz zwar nicht identisch sein kann mit einer vorgegebenen rationalen Zahl (welche nicht selbst *Rte* Potenz einer solchen ist), ihr aber doch nach der aufgestellten Gleichheitserklärung gleich ist, so wie der periodische Dezimalbruch $0.\dot{9} = 1$ ist.

Die Ausdehnung der Theorie auf addit. Aggregate, deren Glieder nicht mehr pos. rat. Zahlen sind, vollzieht sich ohne Schwierigkeit.

Den Schluß bildet die Untersuchung der multiplikativen Aggregate, welche nach Weierstraß durch additive erklärt werden.

Genocchi, Dr. jur. Angelo, weiland Professor an der Universität Turin, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Professor Dr. G. Bohlmann in Berlin und A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Dr. A. Mayer, Professor an der Universität Leipzig. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Lagrange, Joseph Louis, mathematische Elementar-Vorlesungen. Deutsch von Dr. H. Niedermüller, weil. Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. [IV u. 116 S.] gr. 8. 1880. Geh. n. *M* 2.40.

Reichel, Geheimer Regierungsrat, Dr. Otto, Professor an der Kgl. Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 2.40.

In vorliegender Arbeit ist jegliche der natürlichen Zahlenreihe nicht angehörende Art von Zahl aufgefaßt als rein „formales" Gebilde, d. h. als eine Zeichenzusammenstellung, welcher nach den bis zu ihrem ersten Auftreten hin gegebenen Erklärungen keine Zahl mehr entspricht, obschon sie in einer Form erscheint, wie wenn sie eine Zahl bedeutete; auf die in diesem Sinne ausgeführte Festsetzung des Begriffs folgt dann die Festsetzung des Gebrauchs. Als Richtschnur gilt dabei, daß der Gebrauch der neuen Zahlart sich demjenigen der älteren Zahlarten nach Möglichkeit anzupassen hat. Insbesondere für das Irrationale ist von diesem Gesichtspunkt aus eine strenge Theorie entwickelt; diese wird dann in eine Beziehung zur Lehre von den Vektoren gebracht und benutzt, um die für viele Studierende einmal vorhandene Kluft zwischen niederer und höherer Mathematik in möglichst befriedigender Weise zu überbrücken; wobei noch hervorzuheben ist, daß dem Leser gewisse ermüdende Betrachtungen der sogenannten algebraischen Analysis (die besser durch die kürzeren Methoden der höheren Analysis zu ersetzen bleiben) erspart werden konnten.

Schoenflies, Dr. Arthur, Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2 Teile.

I. Teil. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII, 2. Mit Figuren im Text. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M* 8.—

II. „ A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Ergänzungsbände. II. Band. Mit 26 Figuren im Text. [X u. 431 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M* 12.—

Vorstehender Bericht über die Mengenlehre enthält in seinem ersten Teile in 3 Abschnitten: 1. Die allgemeine Theorie der unendlichen Mengen. 2. Die Theorie der Punktmengen. 3. Anwendungen auf Funktionen reeller Variabler. Dabei nimmt in den beiden ersten Ab-

schnitten die Darstellung die Form eines Lehrbuches an, weil der Verfasser nur so hoffen konnte, bei einem in seinen Einzelheiten noch wenig gekannten Gebiete, sich in den Teilen, die die Anwendungen enthalten, knapper und doch verständlich ausdrücken zu können.

Der zweite Teil ist vorzugsweise den geometrischen Anwendungen gewidmet. Insbesondere hat hier derjenige Teil, der im Mittelpunkt der Analysis situs steht, und in dem die geometrisch invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde zum Ausdruck kommen, eine zusammenhängende Darstellung erfahren. Außerdem enthält dieser Teil Nachträge zum ersten Teil. Im übrigen ergibt sich der Inhalt aus folgenden Kapitelüberschriften: 1. Allgemeine Mengensätze. 2. Die geordneten Mengen. 3. Punktmengensätze. 4. Die gestaltlichen Grundbegriffe. 5. Die geometrischen Invarianten der Analysis situs. 6. Die stetige Kurve. 7. Die Kurvenmengen und der Funktionalraum.

Schröder, Dr. **E.**, weiland Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende.

I. Band: Die sieben algebraischen Operationen. [X u. 360 S.] gr. 8. 1873. Geh. n. *M.* 8.—

——— der Operationskreis des Logikkalkuls. [VI u. 37 S.] gr. 8. 1877. Geh. n. *M.* 1.50.

——— Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bände.

I. Band. Mit vielen Figuren im Text. [XII u. 717 S.] gr. 8. 1890. Geh. n. *M.* 16.—

II. — 1. Abteilung. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 400 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. *M.* 12.—

II. — 2. Abteilung. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. E. Müller, Professor an der Oberrealschule zu Konstanz. Mit einem Bildnis E. Schröders und Figuren im Text. [XXIX u. 206 S.] gr. 8. 1905. Geh. n. *M.* 8.—

III. — A. u. d. T.: Algebra und Logik der Relative. Mit vielen Figuren im Text. In 2 Abteilungen I. Abteilung. [VIII u. 649 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. *M.* 16.—

III. — II. Abteilung (Schluß). (In Vorbereitung.)

Simon, Dr. **Max**, Professor am Lyceum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. *M.* 3.60.

Die vorliegende Schrift bezweckt, den Studierenden die Ziele des arithmetisch-algebraischen Unterrichts der neunklassigen höheren Schulen zu zeigen und sie anzuleiten, den zusammenfassenden Überblick auf der obersten Stufe methodisch zu geben. — Die Schrift zerfällt in zwei nebeneinander herlaufende Teile: die Entwicklung des Zahlbegriffs vom Zählen an bis zu den komplexen Zahlen und die Auflösung der algebraisch auflösbaren Gleichungen. Der Begründung des Begriffs und der Rechnungsregeln der Irrationalzahlen ist besondere Sorgfalt gewidmet, der Verfasser hat sich dabei wesentlich an die Georg Cantorsche Methode gehalten, weil sie s. E. wesentliche Vorzüge vor der Dedekindschen und Weierstraßschen besitzt. Eine geringfügige Modifikation ist durch die Auffassung des Verfassers vom Grenzbegriff als einer Kategorie, d. h. eines irreduzibeln Grundvermögens der Vernunft bedingt. Die ganze Entwicklung wird beherrscht von der Ausbildung des Funktionsbegriffs, dessen zentrale Stellung im Unterricht der Verfasser schon seit mehr als 20 Jahren betont hat.

Stolz, Dr. **O.**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, Größen und Zahlen. Rede bei Gelegenheit der feierlichen Kundmachung der gelösten Preisaufgaben am 2. März 1891 zu Innsbruck gehalten. [30 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. *M.* —.80.

Stolz, Dr. O., und Dr. **J. A. Gmeiner**, Professor an der Universität Innsbruck, theoretische Arithmetik. 2. umgearbeitete Auflage ausgewählter Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. [IX u. 402 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 10.60.

Vorstehendes Buch ist die Neubearbeitung ausgewählter Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz, die der „theoretischen Arithmetik" angehören, wobei unter diesem Namen von den Verfassern die Lehren von den reellen und von den gemeinen komplexen Zahlen in Verbindung mit dem Nachweise, daß es außer den genannten keine Zahlen gibt, mit denen nach denselben Regeln gerechnet werden kann, wie mit den reellen Zahlen, verstanden werden.

Veronese, Dr. **Giuseppe**, Professor an der Universität Padua, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XLVII u. 710 S.] gr. 8. 1894. Geh. n. *M.* 20.—

Vivanti, Dr. G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrgb. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Der Verfasser hat, einer Anregung des Herausgebers folgend, für die deutsche Ausgabe seiner 1901 erschienenen „Teoria delle funzioni analitiche" nicht nur die beiden ersten Teile — Elemente der Mengenlehre und Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen — mehr oder weniger großen Änderungen und Ergänzungen unterworfen, sondern insbesondere den dritten Teil — Ergänzungen zur Theorie der analytischen Funktionen — fast ganz neu gefaßt. So ist z. B. die neuere Theorie der ganzen Funktionen zu einer wahren Monographie des Gebietes geworden, in der die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen systematisch und einheitlich entwickelt werden. Ebenso ist die Literatur ergänzt und die Bibliographie der Mengenlehre eingefügt worden. — Das große Interesse, das sich an die neueren funktionentheoretischen Untersuchungen, insbesondere über die ganzen Funktionen, knüpft, läßt hoffen, daß die vorliegende deutsche Umarbeitung den Kreisen der Mathematiker nicht unwillkommen sein werde.

Weber, Dr. **Heinrich**, u. Dr. **Joseph Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. Els., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walther Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfig. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rud. H. Weber (Heidelberg). Mit 358 Fig. im Text. [XIII u. 666 S.] 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 14.—

Das vorliegende Werk wendet sich in erster Linie an die gegenwärtigen und künftigen Lehrer an höheren Schulen, an die Studierenden der Mathematik unserer Hochschulen. Es beansprucht nicht, wie die große Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, das Material allseitig zu erschöpfen, nach der historischen und literarischen Seite hin vollständigen Aufschluß zu geben. Es will eine Verbindung herstellen zwischen der höheren Mathematik und der Mathematik der Schule, indem es einerseits dem Studierenden ein Führer ist, wo er der Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse bedarf, andererseits dem Lehrer ein Wegweiser, um das im Studium der höheren Mathematik Erworbene der Vertiefung und Bereicherung des Unterrichts nutzbar zu machen. Besonderes Gewicht ist auf die wissenschaftliche Ausgestaltung der allgemeinen Grundlagen gelegt.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

P&A Sci.